GÉNESIS HISTÓRICA DE SISTEMAS NUMÉRICOS, ALGEBRAICOS Y DEL CÁLCULO VARIACIONAL

BASE DE UNA EDUCACIÓN MEDIADA SOCIOCULTURALMENTE POR ACTIVIDADES DE CONTAR, MEDIR, CALCULAR Y PREDECIR

Coordinadores:
Erivan Velasco Nuñez
Germán Muñoz Ortega
Edgar Javier Morales Velasco

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS

UADY
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS

UADY
UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE YUCATÁN

GÉNESIS HISTÓRICA DE SISTEMAS NUMÉRICOS, ALGEBRAICOS Y DEL CÁLCULO VARIACIONAL

BASE DE UNA EDUCACIÓN MEDIADA SOCIOCULTURALMENTE POR ACTIVIDADES DE CONTAR, MEDIR, CALCULAR Y PREDECIR

Octubre, 2024

GÉNESIS HISTÓRICA DE SISTEMAS NUMÉRICOS, ALGEBRAICOS Y DEL CÁLCULO VARIACIONAL. BASE DE UNA EDUCACIÓN MEDIADA SOCIOCULTURALMENTE POR ACTIVIDADES DE CONTAR, MEDIR, CALCULAR Y PREDECIR

Edición: **Luis Adrián Maza Trujillo**
Diseño editorial de colección y forros: **Bernardo O. R. De León**
Formación: **María Beatriz Arévalo Dorry**

ISBN UNACH: **978-607-561-219-5**
ISBN UADY: **978-607-8741-62-5**

Ambas Instituciones forman parte la Red Nacional de Editoriales Universitarias y Académicas de México, Altexto y de la Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y El Caribe, EULAC.

Esta publicación fue evaluada por pares académicos, mediante un proceso a doble ciego.

Hecho en México
Made in Mexico

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Edgar J. Morales Velasco,
Chiapas, México, 2023

En la sociedad parece que hay dos grupos de personas: los que son amantes de las matemáticas y los que de generación en generación hasta hoy se preguntan ¿por qué tengo que estudiar Matemáticas? ¿de qué sirve aprender las Matemáticas? ¡elegiré una carrera que no tenga que toparse con Matemáticas!

Este libro, “Génesis histórica de sistemas numéricos, algebraicos y del cálculo variacional Base de una educación mediada socioculturalmente por actividades de contar, medir, calcular y predecir” que comienzas a leer, está estructurado para que pueda apreciar la génesis desde un punto de vista epistemológico de las matemáticas, enfoque diferente a las Matemáticas escolares.

Consideramos que toda relación tiene un origen y lo que hoy comenzarás con las matemáticas partirá de su historia contada por investigadores, porque todo el conocimiento que se conoce hoy día tiene su fundamento en el conocimiento antiguo; por lo que la historia es una base fundamental para comprender las matemáticas actuales. Además, nos hemos dado a la tarea de recopilar esta hermosa historia, que te dará mil y una razones por las que debes estudiar Matemáticas dentro y fuera de la vida escolar.

El libro ha sido escrito cuidando cada uno de los contenidos abordados, es decir, su estructura es simple porque los contenidos se abordan desde lo más simple hasta lo más complejo. Está actualizado porque cada contenido de cada uno de los capítulos tiene un riguroso sustento científico producto de las metodologías de investigación. También es cautivador por la forma en que ha sido estructurado, lo que lo hace invitar a conocer e involucrarse más en las matemáticas. En cada uno de los capítulos se proponen actividades novedosas y didácticas.

Por último, este libro también fue pensado para que los profesores tengan herramientas pedagógicas de enseñanza con base en la Matemática educativa de forma que involucre, y despierte el interés en sus estudiantes por las matemáticas, y usando un método genético epistemológico. Del mismo modo, proporcionará tanto a los curiosos, estudiantes como a los profesores una mejor comprensión de las matemáticas.

PRÓLOGO

La Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) fue el punto de encuentro de los autores de este libro (aproximadamente una década antes) en el Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Ingeniería que impartía la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Después nuestros caminos científicos se nutrieron de diversas disciplinas: Física Educativa (emergente en México), Estudios Regionales, Ciencias de la Educación, Didáctica de las Matemáticas y Diferentes Ingenierías. En paralelo, nuestros caminos como profesores se nutrieron de la práctica cotidiana de la docencia en Chiapas al vivir las problemáticas del aprendizaje de las Matemáticas y la ciencia (en la institución escolar y en la sociedad). También dedicamos parte de nuestro tiempo a la divulgación científica. Por todo lo anterior este libro recopila y organiza nuestras experiencias en los diversos caminos científicos y docentes. Además, representa un esfuerzo colectivo por practicar la interdisciplina y la transdisciplina como una necesidad funcional para propiciar el aprendizaje de las Matemáticas en relación con las demás ciencias y en relación con las actividades humanas milenarias que permitieron la supervivencia humana en nuestro planeta tierra y por consecuencia el nacimiento de lo que hoy conocemos como matemáticas.

Reflexionando nuestro pasado, nuestro presente y nuestro futuro, nos inspiramos para iniciar el título del libro con la idea de génesis histórica y desarrollar un hilo conductor para reconstruir lo esencial de la aritmética, álgebra y (diferencial e integral). Encontramos un eje transversal en la génesis histórica de las actividades humanas milenarias (Contar, medir, calcular y predecir) que necesitan de mecanismos de mediación sociocultural pare entender contextos socioculturales contemporáneos en nuestro estado de Chiapas, entonces desarrollamos un enfoque teórico regional centrado en la mediación sociocultural. Para caminar hacia el futuro diseñamos actividades para la mediación social que propicien el aprendizaje contextual de matemáticas con base en su génesis histórica y con base en un diálogo permanente con la diversidad cultural de nuestra región a través de una educación intercultural.

Siempre es necesario luchar contra los reduccionismos y fronteras disciplinares, entonces la noción de —mediación sociocultural— permite fluir de la epistemología (enfoque histórico crítico) a la psicología (enfoque cognitivo) y luego a la sociología (contextos socioculturales). También fluir de la Matemática Educativa (rediseño del discurso Matemático Escolar (dME)) a la educación (enfoque intercultural) y luego a la antropología (actividades humanas milenarias). Se presenta en el libro un punto de convergencia en los mecanismos de mediación sociocultural para desarrollar una teoría emergente regional (tipos de mediación sociocultural) y caminar hacia el futuro construyendo una educación para Chiapas con nuestra propuesta de metodología intercultural.

El libro desea expresar nuestras coincidencias con las visiones de comunidades científicas que afirman con sus propuestas: 1) Hacer historia de las matemáticas es hacer Matemáticas (Dra. Carmen Martínez Adame de Facultad de Ciencias UNAM y Dr. Raúl Rojas González del Departamento de Matemáticas de la Universidad Libre de Berlín). 2) Hacer didáctica de las Matemáticas es hacer matemáticas (Dr. Yves Chevallard del Enfoque Antropológico de la Didáctica de las Matemáticas). En otras palabras, implica algo difícil de asimilar: Que la historia de las matemáticas y la didáctica de las Matemáticas deben reconocerse científicamente como partes inherentes (imprescindibles) del futuro desarrollo de las matemáticas.

Este libro fue construido con fundamentos científicos, sin embargo, tiene múltiples lecturas: A) es de interés para los investigadores por la teoría emergente regional que propone (tipos de mediación sociocultural). B) es de interés para los profesores por la génesis histórica y por los diseños de actividades para sus escuelas y por la metodología intercultural que se propone para Educación en Chiapas. C) es muy accesible para los Estudiantes porque permite desarrollar su creatividad al mirar la génesis histórica de la aritmética, el álgebra y el cálculo (diferencial e integral) y su relación con las actividades Humanas de contar, medir, calcular y predecir (actividades mediadoras de lo ancestral hacia lo contemporáneo).

Germán Muñoz Ortega,
Chiapas, México, 2023

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de actividades prácticas milenarias (contar, medir, calcular y predecir), a lo largo de la historia de la humanidad, ha llevado a la necesidad de expresar de manera simbólica los conocimientos modelados por su entorno social. Además, coinciden, como lo postula la psicología genética, con el desarrollo de los niveles cognitivos.

Al identificar conceptos matemáticos del programa de estudios de la educación básica se encontró que estas actividades prácticas (contar, medir, calcular y predecir) están presentes a lo largo de toda la educación primaria, secundaria, bachillerato y universidad.

El libro atiende la problemática de un deficiente aprendizaje de las Matemáticas al enseñar los conceptos como un conocimiento terminado. Por lo que, coincidiendo con investigaciones dentro de la disciplina de la Matemática educativa, se ha planteado que:

> […] las aplicaciones, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; estas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. (Godino, 2004, pp. 21-22).

Este texto acercará a los estudiantes y profesores (de nivel básico a superior) con una visión del por qué se estudia Matemáticas en todos los niveles educativos y forman parte del currículo escolar (están dentro de los programas de estudio).

Se tomarán bases de teorías conocidas y se reacomodarán de acuerdo con el beneficio de nuestra realidad en Chiapas (se propone una teoría emergente de tipos de mediación sociocultural) para el desarrollo de una metodología intercultural que permita transitar de la génesis histórica de las actividades prácticas milenarias hasta nuestros tiempos relativamente contemporáneos, en nuestras comunidades específicas (génesis cognitiva-didáctica). Lo anterior implica se reestructure la forma de aprender, de manera que se deconstruya y reconstruya el conocimiento matemático en entornos socioculturales con su cosmovisión asociada.

Se presenta una diversidad como la génesis histórica de sistemas numéricos y la revolución del cero en la construcción de un sistema posicional. Después el origen histórico del álgebra y el “aha” como una forma diferente de pensar numéricamente para resolver problemas del entorno social. Enseguida un análisis histórico-epistemológico de un sistema algebraico asociado a las Leyes de Kirchhoff. También aparece un estudio histórico de un sistema de Cálculo Variacional. Continuando con una historia sociogenética del Cálculo Integral. Finalmente se presenta una versión intercultural de las Funciones.

El hilo conductor del texto fueron las actividades prácticas de contar, medir, calcular y predecir (en donde no se parte de un concepto en particular sino más bien de las actividades) que permitieron diferentes tipos de mediación sociocultural con diversidad de contextos y herramientas (desde materiales caseros hasta uso de tecnología digital).

El contenido del libro propone una teoría emergente sobre los tipos de mediación sociocultural asociada a una metodología para una educación intercultural en Chiapas. El libro es un esfuerzo colectivo en donde los autores hemos seguido diversos caminos y en este momento de convergencia pensamos: “el camino que hemos recorrido permitió comprender que necesitamos construir nuestro propio camino”.

Para finalizar, comentamos que esta obra deriva de aportaciones inéditas, de autores chiapanecos preocupados por la forma en que la Matemática que se enseña en las escuelas carece de comprensión y apropiamiento. A esta Matemática se le ha denominado un Discurso Matemático Escolar, el cual se ha convertido en un obstáculo didáctico por sí mismo. No es la intención enmarcar esta producción en una sola corriente teórica, pero si en un marco de referencia como la Matemática Educativa, la cual ha coadyuvado a identificar esta problemática en la enseñanza de las matemáticas en las instituciones escolares de nuestro país. Por ello, los autores, con la intención de establecer un puente entre el aprendizaje y la construcción del conocimiento matemático, han realizado las aportaciones de este compendio. Esto con la finalidad de favorecer a la resignificación de los conceptos matemáticos y su apropiación sociocultural a través de las prácticas de contar, medir, calcular y predecir.

Los capítulos de esta obra

En el primer capítulo se hace un análisis histórico y antropológico en distintas culturas milenarias, donde las prácticas de contar, calcular y medir figuraron de manera importante al interior de esas culturas y al contrastarlo con la forma de enseñanza en el nivel básico de sistema educativo mexicano, se puede interpretar que están inmersos ahí. Sin embargo, estos contenidos se vuelven obstáculos que impiden un aprendizaje significativo en los estudiantes, por lo que, a través de un estudio histórico-epistemológico y mediante una convención por mediación social que se llega a una deconstrucción de contar, calcular y medir, lo cual, según el autor de este capítulo, se favorece a dichas prácticas en el aula de matemáticas.

En el segundo capítulo, la autora hace un análisis histórico y sociocultural en distintas culturas milenarias donde las prácticas de contar, calcular y medir figuraron de manera importante al interior de esas culturas, sin embargo, se va más allá y se evidencia la forma en que esas culturas agregaban un valor no conocido (el “aha”) cuando realizaban dichas prácticas. Se retoma esa forma de agregar lo desconocido a las prácticas de contar, calcular y medir en una actividad de mediación social, donde las niñas pueden acercarse a esa forma tan peculiar de plantear variables desconocidas.

Mientras que el tercer capítulo, el autor nos propone un traslado a un conocimiento referente a la corriente eléctrica y elementos resistivos. En primera instancia acerca al estudiante trabajando actividades de flujo de agua (actividades de mediación social), donde este flujo hace un símil con la corriente eléctrica. Posteriormente lleva al estudiante a una configuración en paralelo usando una configuración de tuberías y nuevamente usando el flujo de líquidos. Para cerrar las actividades con Tecnologías del Aprendizaje del Conocimiento (TAC), que utiliza elementos resistivos y corriente eléctrica. Según el autor esta forma de trabajar favorece un ambiente donde los estudiantes sean más activos, donde jueguen, discutan, manipulen, den continuidad a su curiosidad, su rol de experimentadores, su habilidad y destreza social. Caso contrario lo que provoca la "escuela normal", lo que resulta en el estudiante una apatía hacia su aprendizaje, provocando una emoción desfavorable.

Asimismo, en el capítulo 4, el autor retoma la mediación sociocultural, para ello hace un análisis histórico-epistemológico del Cálculo como un sistema variacional para construir la serie de Taylor a partir de la predicción en el contexto de un circuito Resistencia-Condensador.

En el capítulo 5, al autor discute profundamente la sociogénesis del Cálculo Integral. Realiza una caracterización de los tipos de mediación sociocultural, usados como teoría emergente a lo largo de este libro. Se presenta una epistemología actualizada del Cálculo Integral con base en actividades de predicción para la mediación sociocultural.

En el capítulo 6 se retoma una metodología para la incorporación de aspectos culturales para los pueblos originarios del estado de Chiapas, dando lugar a un diseño de actividades de mediación sociocultural que utiliza aspectos del pensamiento y lenguaje variacional, y dichos aspectos culturales permiten resignificar la relación existente entre el parámetro pendiente con respecto a la inclinación de la recta.

En conclusión, este trabajo tiene un aporte de gran relevancia ya que considera un aspecto innovador como es la mediación sociocultural para la construcción del conocimiento matemático, es decir, no se considera acabado como en el Discurso Matemático Escolar dominante, sino como un conocimiento vivo e inherente a la vida del ser humano en la complejidad de su entorno.

Los autores,

Chiapas, México, 2023

CAPITULO 1

GÉNESIS HISTÓRICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS: MEDIACIÓN SOCIAL CON ACTIVIDADES DE CONTAR, MEDIR Y CALCULAR

Emiliano Núñez Constantino

Introducción

La Matemática educativa presenta una visión contemporánea de cómo atender los problemas matemáticos, pues en su tratamiento busca los gérmenes de los fundamentos y principios que dieron lugar a distintos conceptos como el número, la noción del cero, los sistemas numéricos que en el recorrido histórico han desembocado en un conocimiento más abstracto; entender las concepciones matemáticas y comprender las nociones de cómo se han desarrollado a lo largo de la historia, son pues el hilo conductor que entrelaza la aritmética, el álgebra, el cálculo que se encuentra en este libro en los diferentes capítulos.

A diferencia de lo que se entiende por Matemáticas en la educación tradicional, a menudo descontextualizada, sin la historia de su origen, sin sentido cotidiano, donde se ha reforzado la idea de una educación transmisora, de la repetición de los algoritmos a lo largo de la educación escolar; nuestro libro ofrece una visión ampliada de lo matemático, ya que relaciona los conceptos exactos de las matemáticas, con sus usos históricos, las prácticas que se han elaborado para enriquecer las nociones de lo matemático, las habilidades sociales para encontrar en la comunicación del conocimiento matemático un sentido que permite la generación de nuevo conocimiento, que contribuye al desarrollo de habilidades, técnicas, herramientas, tecnologías, incluso avances en la sociedad actual.

En este capítulo se presenta un estudio epistemológico de los sistemas numéricos en el plano de la génesis histórica de contar, medir y calcular, en tanto actividades humanas milenarias. Con base en lo anterior se diseñaron actividades para escenarios educativos contemporáneos en Chiapas con la finalidad de mediar socialmente la construcción de un sistema posicional considerando la práctica de contar, medir y calcular.

1.1. Dimensión histórica y epistemológica sobre las prácticas de contar, medir y calcular

El primer gran debate que podríamos encontrar en la composición de un conocimiento matemático, es si es un invento o se descubre, esta limitante ha llevado a científicos de renombre, a plantearse en una u otra postura, sin embargo, en tiempos modernos limitar la visión de lo matemático, no contribuye al entendimiento de generación del conocimiento, conviene conocer las distintas visiones y comprender de manera ampliada, a fin de mejorar el conocimiento matemático y tener una comprensión de lo matemático con un espectro amplio. Es por esto que abordaremos epistemológicamente lo matemático desde sus distintas comprensiones.

I

Posiblemente la estructura matemática existe mucho antes que el hombre llegará a existir. Es decir, las estructuras matemáticas se representan en el diseño del universo, la estructura de los elementos, que le dieron origen, como el hidrógeno, los objetos unitarios como sustancias o cuerpos celestes, las formas espaciales, el círculo, la elipse, la espiral, y con ellas las cantidades de esos objetos y esas formas, además de las formas geométricas de la naturaleza, en el planeta tierra, la forma circular de la luna, la planicie terrestre, las rectas de los árboles, apoyan el argumento de Galileo Galilei cuando dice en su obra el *ensayador*: “que el universo está escrito en lenguaje matemático, y las letras son los triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra.” (Galilei, 1984).

Así también el mismo Galileo ve en los objetos ciertas características inseparables de estos:

> Digo que en el momento en que imagino una materia o sustancia corpórea, me siento en la necesidad de imaginar, al mismo tiempo, que esta materia está delimitada y que tiene esta o aquella forma, que en relación

con otras es grande o pequeña, que está en este o en aquel lugar, en este o aquel tiempo, que se mueve o está en reposo, que está o no en contacto con otro cuerpo, que es una, pocas o muchas; ni con gran imaginación puedo separarlas de estas condiciones; pero que deba ser blanca o roja, amarga o dulce, sonora o muda, de olor agradable o desagradable, no me siento en la necesidad de forzar mi mente para tener que representármela acomodada a tales condiciones; más bien si los sentidos no las hubieran advertido, tal vez la razón o la imaginación por sí mismas no lo hubieran logrado nunca. Por todo ello, pienso que estos sabores, olores, colores, etc., por parte del sujeto en el que parece que residen, no son más que meros nombres […]" (Galilei, 1984).

II

Posiblemente la construcción de las matemáticas sea un producto humano como afirman los teóricos en física-matemática, Albert Einstein se preguntaba a principios del siglo XX: "¿cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?" (Rodríguez & Zuazua, 2002).

Si nos trasladamos al terreno de la argumentación filosófica, la primera idea de Galileo seria empirista, y la idea de Einstein, apriorista. La Epistemología Genética desarrollada por Jean Piaget da un tercer punto de vista, no hay estructuras sin génesis, ni génesis sin estructuras, se podría considerar entonces que no es ninguna de las dos, sino la interacción de ambos puntos de vista apriorista y empirista observada desde el sujeto y el medio, Piaget afirma "[…] el desarrollo del conocimiento, considerado como la forma más avanzada de adaptación de un ser biológico a su medio" (García, 1996).

1.2. Desarrollo histórico del constructo matemático de número en relación a los usos y las prácticas

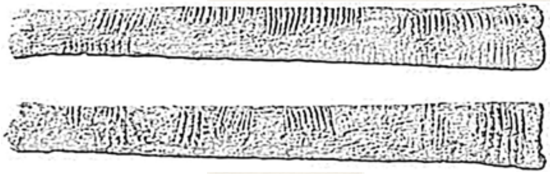
A continuación, se realiza una búsqueda del constructo matemático desarrollado a lo largo de la historia a través de las prácticas de contar, medir y calcular. Desde la práctica de contar se pueden encontrar las construcciones históricas que nos llevó a la necesidad de expresar los números y representarlos de distintas maneras:

> La historia de la matemática comienza con la invención de símbolos escritos para denotar números. Nuestro familiar sistema de dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, para representar todos los números [...], nació hace unos imaginables 1,500 años, y su extensión a los decimales que nos permiten representar números con alta precisión, no tiene más de 450 años. (Stewart, 2009, p. 12).

i. De la cantidad a las marcas de cuenta

Siguiendo las investigaciones de Stewart (2009) notamos que las marcas de cuenta demuestran la necesidad humana de registrar cantidades, los registros de este tipo son antropológicos. El conocido hueso de Lebombo muestra “29 muescas grabadas en un hueso de pata de babuino datan de 37,000 años” (Stewart, 2009, p. 14) encontrado en una cueva entre Suazilandia y Sudáfrica; en la antigua Checoslovaquia un hueso de lobo “tiene 57 marcas dispuestas en once grupos de cinco con dos sueltas tiene unos 30,000 años; El hueso de Ishango tiene 25,000 (otras estimaciones la ubican entre 6,000 a 9,000 años)” (Stewart, 2009, p. 14), encontrado en Zaire.

Figura 1. Hueso de Ishango 25,000 a. C.



Nota:Elaboración propia, ilustración digital en colaboración con Emilia Y. Núñez.

Sin embargo, esta necesidad de conservar la cantidad lleva a la búsqueda de expresar de algún modo el registro de estas cantidades encontradas. “Las marcas numéricas más antiguas datan de las primeras civilizaciones humanas, en el paleolítico. Los hombres debieron de aprender a conservar los números igual que aprendieron a conservar el fuego”. (Guedj, 2011, p. 16).

Figura 2. Marcas numéricas del paleolítico 15,000 a.C.

Fuente: ilustración digital en colaboración con Emilia Y. Núñez.

La necesidad de expresar la cantidad llevo al hombre a representar con marcas como líneas y puntos el conteo, sin embargo, no era dentro de un sistema de escritura verbal, ni numérica, aun así, servía para llevar el control sobre alguna cantidad, sin ser una superestructura de un sistema numérico, deja ver como germinaba la numeración pasando por fichas de arcilla hasta la numeración escrita.

ii. De las marcas a los números

La escritura nació en sumeria hacia 3,300 años a. C., en Mesopotamia, el país entre ríos […]. El establecimiento de una contabilidad, que se hizo cada vez más compleja, requirió un registro escrito de las cuentas, así nacería la representación escrita de las cuentas. Así nacería la representación escrita de los números. El primer sistema de numeración escrito es el sumerio. (Guedj, 2011, pp. 33-34).

Según Stewart (2009) el camino histórico desde las fichas de los contables a los numerales modernos llevó milenios, desde los pueblos de Mesopotamia con el desarrollo de la agricultura, y la forma de vida nómada dio paso a un asentamiento permanente en una serie de ciudades estado: Babilonia, Lagash, Sumer, Ur. Usaron "primitivos símbolos inscritos en tablillas de arcilla húmeda (pictogramas: símbolos que representan palabras mediante imágenes simplificadas) y posteriormente los pictogramas" (p. 15) se transformaron en escritura "cuneiforme (en forma de cuña). Los símbolos numerales babilónicos van mucho más allá de un simple sistema de recuento" (Stewart, 2009 p. 15).

iii. De los números a las cifras

En cuanto a las cifras las hemos representado en símbolos: "Las cifras son unos números concretos a los que se confía la función de representar a los números […], mediante unos símbolos concretos. Así tenemos las cifras arábigas […], o el clavo y la espiga en la numeración sumeria." (Guedj, 2011, p. 34)

Figura 3. Tablilla Mesopotámica de contabilidad 2,400 a.C. con numeración sumeria de clavo y espiga.

Fuente: Elaboración propia, ilustración digital en colaboración con Emilia Y. Núñez.

Para Guedj "las cifras de uno a nueve, se inventaron en la India antes de nuestra era aparecen en las inscripciones de Nana Ghat, en el siglo III a. C." (2011, p. 51).

> Pero el principio de posición no se había aplicado todavía, ni tampoco se detecta la presencia del cero, la numeración de posición con un cero se inventó, en la India en el transcurso del siglo V de nuestra era. En 458 apareció el Lokavibhaga "las partes del universo" un tratado de cosmología escrito en sánscrito. En él se ve el número *catorce millones doscientos treinta y seis mil setecientos trece*, escrito según el principio de posición con el solo empleo de ocho cifras: 14.236.713 (en el texto las cifras están escritas con todas las letras y de derecha a izquierda: tres, uno, siete, seis, tres, dos, cuatro, uno. En este texto aparece igualmente la palabra sunya, el vacío, que representa al cero. Este es hoy por hoy el documento más antiguo que hace referencia a esta numeración. (Guedj, 2011, pp. 51-52).

De la práctica de medir podemos ver de manera más evidente relaciones físicas con lo matemático. Ahora bien, volviendo a la ciencia como esa búsqueda de entender a la naturaleza, observamos que todo ese andar desemboca a la noción de medida.

Según Gusdorf (1977) “Los sabios, embarcados en esa conquista de la aproximación, ya no piensan que la exactitud en cuestión desvié su atención de cualquier otra apertura a una realidad ajena a los esquemas restrictivos de la nueva ciencia […]” (Guedj, 2011, p. 145).

La medición por su parte, son una parte fundamental para el desarrollo matemático, porque da las pautas del punto de partida para el razonamiento matemático en las cantidades: la unidad con la que se compara para poder medir. En la historia han existido muchas unidades de medida que dan cuenta de esta abstracción del pensamiento para poder conocer las magnitudes que se requerían.

La geometría (que significa medida de la tierra) fue desarrollada por los egipcios y documentada por los griegos, fue Euclides de Alejandría (325-265 a.C.) el geómetra griego más conocido. Se ubicó en el campo de las dimensiones espaciales en la que predomina la longitud; en el libro primero y libro quinto de la obra Elementos, leemos las siguientes definiciones del libro primero: “1. Un punto es lo que no tiene partes. 2. Una línea es una longitud sin anchura. […] 5. Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.” (Hawking, 2010, p.7).

Y el libro quinto de la obra Elementos, leemos: “1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor. 2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor. 3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas." (Hawking, 2010, p.14).

Podemos encontrar que, a partir de magnitudes de longitud y composiciones de ella como superficies, se desprenden la construcción de las formas geométricas. A pesar de estos escritos griegos, "la geometría estuvo estancada entre los años 300 y 1600". (Stewart, 2009, p. 172).

La explosión de las ciencias exactas de la física y las matemáticas para el avance tecnológico e intelectual se dio a razón de que las comunidades científicas convinieron en el uso de medidas.

> Después de la Revolución Francesa los estudios para determinar un sistema de unidades único y universal concluyeron con el establecimiento del Sistema Métrico Decimal. La adopción universal de este sistema se hizo con el Tratado del Metro o la Convención del Metro, que se firmó en Francia el 20 de mayo de 1875, y en el cual se establece la creación de una organización científica que tuviera, por una parte, una estructura permanente que permitiera a los países miembros tener una acción común sobre todas las cuestiones que se relacionen con las unidades de medida y que asegure la unificación mundial de las mediciones físicas. (Nava, Pezet & Hernández, 2001).

Basándonos en la observación del medio y de la interacción tenemos con la naturaleza se obtienen las conocidas unidades básicas que son las medidas de las que se derivan todo lo medible conocido, a saber, la longitud, la masa, el tiempo, la corriente eléctrica, la temperatura, cantidad del sustancia e intensidad luminosa. A continuación, ponemos a disposición las tablas que contienen las medidas las cuales se han convenido en The International System of Units (SI) 8th edition (2006):

Tabla 1. Unidades básicas el Sistema Internacional de Unidades (SI)

Tabla 1. Unidades básicas del SI

Magnitudes básicas		Unidades SI básicas	
Nombre	Símbolo	Nombre	Símbolo
longitud	l, x, r, etc.	metro	m
masa	m	kilogramo	kg
tiempo, duración	t	segundo	s
corriente eléctrica	I, i	amperio	A
temperatura termodinámica	T	kelvin	K
cantidad de sustancia	n	mol	mol
intensidad luminosa	I_v	candela	cd

Los símbolos de las magnitudes generalmente son letras solas, de los alfabetos griego o latino, impresas en cursiva. Se trata de *recomendaciones*.

Los símbolos de la s unidades son *obligatorios*, véase el capítulo 5.

Fuente: Tomado del documento original del SI Units (p. 116).

Las cuales “por convención tienen un nombre, un símbolo, una unidad de medida y un símbolo de la unidad de medida” (Muñoz y Constantino, 2013 p. 190-197). Así también se tienen unidades derivadas que son combinaciones de estas siete anteriores, en diversas formas:

Tabla 2. Unidades derivadas de SI.

Tabla 2. Ejemplos de unidades SI derivadas coherentes expresadas a partir de las unidades básicas

Magnitud derivada		Unidad SI derivada coherente	
Nombre	Símbolo	Nombre	Símbolo
área, superficie	A	metro cuadrado	m^2
volumen	V	metro cúbico	m^3
velocidad	v	metro por segundo	m/s
aceleración	a	metro por segundo cuadrado	m/s^2
número de ondas	σ, $\tilde{\nu}$	metro a la potencia menos uno	m^{-1}
densidad, masa en volumen	ρ	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
densidad superficial	ρ_A	kilogramo por metro cuadrado	kg/m^2
volumen específico	v	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
densidad de corriente	j	amperio por metro cuadrado	A/m^2
campo magnético	H	amperio por metro	A/m
concentración de cantidad de sustancia [(a)], concentración	c	mol por metro cúbico	mol/m^3
concentración másica	ρ, γ	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
luminancia	L_v	candela por metro cuadrado	cd/m^2
índice de refracción [(b)]	n	uno	1
permeabilidad relativa [(b)]	μ_r	uno	1

(*a*) En el campo de la química clínica, esta magnitud se llama también concentración de sustancia.

(*b*) Son magnitudes adimensionales o magnitudes de dimensión uno. El símbolo "1" de la unidad (el número "uno") generalmente se omite cuando se indica el valor de las magnitudes adimensionales.

Fuente: Tomado del documento original del SI Units (2006, p. 117).

Y unidades especiales que tienen su propio símbolo pero que resultan de las anteriores:

Tabla 3. Unidades derivadas coherentes y símbolos especiales.

Tabla 3. Unidades SI derivadas coherentes con nombres y símbolos especiales

Magnitud derivada	Unidad SI derivada coherente [a] Nombre	Símbolo	Expresión mediante otras unidades SI	Expresión en unidades SI básicas
ángulo plano	radián [b]	rad	1 [b]	m/m
ángulo sólido	estereorradián [b]	sr [c]	1 [b]	m^2/m^2
frecuencia	hercio [d]	Hz		s^{-1}
fuerza	newton	N		$m\ kg\ s^{-2}$
presión, tensión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
energía, trabajo, cantidad de calor	julio	J	N m	$m^2\ kg\ s^{-2}$
potencia, flujo energético	vatio	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
carga eléctrica, cantidad de electricidad	culombio	C		s A
diferencia de potencial eléctrico, fuerza electromotriz	voltio	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
capacidad eléctrica	faradio	F	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
resistencia eléctrica	ohmio	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
conductancia eléctrica	siemens	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
flujo magnético *(h)*	weber	Wb	V s	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
densidad de flujo magnético *(i)*	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
inductancia	henrio	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
temperatura Celsius	grado Celsius [e]	°C		K
flujo luminoso	lumen	lm	cd sr [c]	cd
iluminancia	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2}\ cd$
actividad de un radionucléido [f]	becquerel [d]	Bq		s^{-1}
dosis absorbida, energía másica (comunicada), kerma	gray	Gy	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
dosis equivalente, dosis equivalente ambiental, dosis equivalente direccional, dosis equivalente individual	sievert [g]	Sv	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
actividad catalítica	katal	kat		$s^{-1}\ mol$

Fuente: Tomado del documento original del SI Units (2006, p. 118)

Tabla 4. Ejemplos de unidades derivadas coherentes.

Tabla 4. Ejemplos de unidades SI derivadas coherentes cuyo nombres y símbolos contienen unidades SI derivadas coherentes con nombres y símbolos especiales

	Unidad SI derivada coherente		
Magnitud derivada	Nombre	Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa s	m^{-1} kg s^{-1}
momento de una fuerza	newton metro	N m	m^2 kg s^{-2}
tensión superficial	newton por metro	N/m	kg s^{-2}
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	m m^{-1} s^{-1} = s^{-1}
aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	m m^{-1} s^{-2} = s^{-2}
densidad superficial de flujo térmico irradiancia	vatio por metro cuadrado	W/m^2	kg s^{-3}
capacidad térmica, entropía	julio por kelvin	J/K	m^2 kg s^{-2} K^{-1}
capacidad térmica másica, entropía másica	julio por kilogramo y kelvin	J/(kg K)	m^2 s^{-2} K^{-1}
energía másica	julio por kilogramo	J/kg	m^2 s^{-2}
conductividad térmica	vatio por metro y kelvin	W/(m K)	m kg s^{-3} K^{-1}
densidad de energía	julio por metro cúbico	J/m^3	m^{-1} kg s^{-2}
campo eléctrico	voltio por metro	V/m	m kg s^{-3} A^{-1}
densidad de carga eléctrica	culombio por metro cúbico	C/m^3	m^{-3} s A
densidad superficial de carga eléctrica	culombio por metro cuadrado	C/m^2	m^{-2} s A
densidad de flujo eléctrico, desplazamiento eléctrico	culombio por metro cuadrado	C/m^2	m^{-2} s A
permitividad	faradio por metro	F/m	m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2
permeabilidad	henrio por metro	H/m	m kg s^{-2} A^{-2}
energía molar	julio por mol	J/mol	m^2 kg s^{-2} mol^{-1}
entropía molar, capacidad calorífica molar	julio por mol y kelvin	J/(mol K)	m^2 kg s^{-2} K^{-1} mol^{-1}
exposición (rayos x y γ)	culombio por kilogramo	C/kg	kg^{-1} s A
tasa de dosis absorbida	gray por segundo	Gy/s	m^2 s^{-3}
intensidad radiante	vatio por estereorradián	W/sr	m^4 m^{-2} kg s^{-3} = m^2 kg s^{-3}
radiancia	vatio por metro cuadrado y estereorradián	W/(m^2 sr)	m^2 m^{-2} kg s^{-3} = kg s^{-3}
concentración de actividad catalítica	katal por metro cúbico	kat/m^3	m^{-3} s^{-1} mol

Fuente: Tomado del documento original del SI Units (2006, p. 119).

Y para medirse requieren de ser medidas o calculadas en cantidades grandes o pequeñas simplificadas a múltiplos y submúltiplos del sistema decimal:

Tabla 5. Múltiplos y prefijos del SI.

Tabla 5. Prefijos SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Fuente: Tomado del documento original del SI Units (2006, p 121).

Entonces llegamos a la práctica de calcular como una necesidad que con el conteo y la medida, facilitaba la comprensión de cantidades más grandes, las generalizaciones alfabéticas de estas prácticas originaron el algebra y cálculo que se toca en los capítulos siguientes.

Para entender cómo llegamos al cálculo es importante señalar que todas las operaciones matemáticas conllevan cálculo. Al principio, el cálculo se realizaba con piedras. En la Grecia clásica se usaba guijarros para contar y hacer las operaciones básicas. La raíz de la palabra cálculo es la latina calculus, que significa piedra.

Existe evidencia directa de que los babilónicos ya resolvían ecuaciones, si bien dicen que hacer, no dicen porque, se desconoce que método utilizaban, problemas resueltos se encuentran en la tablilla babilónica llamada YBC 4652, el texto indica que originalmente contenía 22 problemas. (Stewart, 2009).

Existen otras evidencias de la realización del uso de cálculos para obtener resultados sobre cualquier campo, los primeros de ellos con uso en el comercio. En Egipto los tributos dependían midiendo tierras según las propiedades, luego de cada inundación del rio Nilo.

En 1800 matemáticos y físicos habían desarrollado el cálculo infinitesimal como una herramienta indispensable para el estudio del mundo natural, y los problemas que surgieron en esta relación llevaron a una riqueza de nuevos conceptos y métodos. (Stewart, 2009, p. 159).

Este análisis en el desarrollo histórico del progreso matemático tanto antropológico como histórico sobre el desarrollo de las matemáticas da pie a observar en varias fuentes como este desarrollo se va dando desde una práctica específica para posterior emigrar a distintas disciplinas, tal como el cálculo infinitesimal nace dentro del desarrollo de la mecánica. Así las prácticas de contar, medir y calcular fueron desarrollándose a través de los largos años que el ser humano exploró su entorno y construyó con la abstracción del pensamiento humano y documentando sus descubrimientos a la matemática.

1.3. Dimensión Cognitiva sobre las prácticas de contar, medir y calcular

En este apartado veremos directamente de obras originales de Piaget y sus colaboradores, cómo el desarrollo cognitivo basado en la psicogénesis y la historia de la ciencia revela que estos guardan cierta relación diacrónica y propone la interacción y la progresión del conocimiento.

En lo pertinente al conocimiento matemático, Piaget aclara la relación de ambas creencias de la matemática y propone la interacción y la progresión del conocimiento:

> La primera creencia u opinión a que hacemos referencia consiste en afirmar que por mucho que sea matematizado un observable físico, en los niveles científicos, dicho observable corresponde sin embargo a un dato exterior al sujeto. La segunda opinión frecuente es que, si la matematización es obra del sujeto, y si el objeto existe, se debe poder trazar una frontera entre dicha matemátización y los objetos, en cuyo caso un "hecho" físico, en cuanto tal, no llevaría consigo una dimensión lógico-matemática, sino que la recibiría posteriormente. Es aquí, donde se impone el análisis de relaciones primitivas. Tal análisis provee una respuesta decisiva: no solamente no existe frontera delimitable entre los aportes del sujeto y los del objeto (el conocimiento solo llega a las interacciones entre ellos), sino que, además, uno no se aproxima jamás al objeto si no es en función de sucesivas logicizaciones y matematizaciones. Más aun, la objetividad misma va aumentando en la medida en que dichos procesos de logicización y matematización se van enriqueciendo. (Piaget y García, 2008).

Si bien no existe un estudio psicogenético que arranque especialmente desde las prácticas para desarrollar un concepto, los conceptos matemáticos documentados a través de la historia guardan estas prácticas y muestran la relación evolutiva de cómo tienen relación el conocimiento a través de estas dos formas, la cognición y la historia de la ciencia.

A continuación, representaremos de manera esquemática a través de una tabla, como es evidenciado en la obra Psicogénesis e historia de la ciencia, este paralelismo. "El paralelismo entre la evolución de las nociones en el curso de la historia y en el seno del desarrollo psicogenético se refiere al contenido mismo de las nociones sucesivas" (Piaget y García, 2008), la siguiente tabla es extraída de la revisión de dicha obra:

Tabla 6. Relación entre el desarrollo cognitivo y la historia de la ciencia.

Desarrollo cognitivo	Historia	Niveles de desarrollo
Preoperatorio 4-6 años	Geometría griega	Intra- figural
	Orígenes del algebra	Intra- operacional
	Desarrollo de la mecánica	Intra- factual
Operaciones concretas 7-10 años	Geometría analítica	Inter – figural
	Resolución de las ecuaciones: Vietti a Galois	Inter- operacional
	Aportación de Descartes	Inter- factual
Operaciones Hipotético- deductivas 11-12 años	Geometría proyectiva	Trans – figural
	Cuerpos Algebraicos Dedekind	Trans- operacional
	Algebras micro físicas	Trans - factual

Fuente: Elaboración propia basado en Piaget y García (2008).

El estudio sobre el desarrollo cognitivo como construcción de estructuras fue estudiada ampliamente por el epistemólogo, biólogo y psicólogo, Jean Piaget, estas estructuras cognitivas, guardan una analogía con el desarrollo histórico de la ciencia.

Pierre Mounoud (2001) profesor de la universidad de Génova, analiza de manera puntual este desarrollo cognitivo como construcción de estructuras:

Presenta de manera muy esquemática el desarrollo cognitivo correspondiente a la imagen obtenida por Piaget y sus colaboradores, una vez que los niños han pasado por la situación en la que se les ha preguntado, y la respuesta ha pasado por el detector de estructuras de conjunto y de invariantes:

Tres estadios, cuatro niveles (familias) de estructuras de conjunto, cuatro variedades de instrumentos de conocimiento (esquemas reflejos, esquemas sensoriomotores, operaciones concretas, operaciones formales) han sido demostrados.

a) Estructuras reflejas que posibilitan la organización automática de las acciones y las percepciones (estructuras biológicas inherentes a un funcionamiento), en las que el reflejo de succión permite al bebé reencontrar el objeto perdido;

b) Estructuras sensoriomotoras que rinden cuenta de los conocimientos prácticos "Objetivos" de los bebés entre 12 y 18 meses (primeras estructuras mentales o físicas). Un ejemplo de ellas es el conocimiento práctico de desplazamiento y de las posiciones relativas de los objetos (los 3 cubiletes);

c) Las estructuras operatorias concretas que rinden cuenta de los juicios y razonamientos "Objetivos" de los niños de 6 a 10 años respecto a situaciones concretas presentes o evocadas verbalmente (primeras estructuras de pensamiento) (las conservaciones, las tres montañas);

d) Estructuras cualificadas de operaciones formales que rinden cuenta de los juicios y razonamientos "Objetivos" de los adolescentes de 14 a 17 años. Los juicios y razonamientos no les conducen sólo sobre lo real, sino también hacia el conjunto de situaciones posibles (estructuras del pensamiento abstracto). (Mounoud, 2001)

1.4. De las actividades prácticas milenarias a la educación en Chiapas: diseño de actividades para la mediación social

Como hemos discutido el conteo se ha desarrollado a lo largo de miles de años en la evolución del hombre, creemos que esto tiene relación con la psicogénesis del conocimiento y las etapas de desarrollo cognitivo como plantea Jean Piaget.

De esta manera se pueden obtener conocimientos matemáticos a partir de estas prácticas que nos llevan de lo concreto a lo abstracto.

Muchos intentos de especialistas nos han demostrado que el estudio repetitivo de un algoritmo no es suficiente para la adquisición del conocimiento, es necesario construir el concepto a través de un estudio epistemológico-histórico, cognitivo y didáctico; pero además de eso es preciso indagar de donde surgen los conceptos (Muñoz, 2006).

Como hemos demostrado estos surgen de las prácticas naturales y sociales, la relación con el entorno, es un enfoque poco estudiado por la epistemología genética y por la socioepistemología.

Estudios tanto en epistemología genética como de la socioepistemología, parten de conceptos matemáticos específicos y con auxilio de las prácticas se favorece el concepto; esto debido que para su enseñanza, basados en la teoría de los campos conceptuales señala que "un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante" (Vergnaud, 1990).

Por otra parte, "La práctica matemática o praxis que consta de tareas y técnicas, y el discurso razonado o logos sobre dicha práctica que está constituido por tecnologías y teorías" (Chevallard, et al, 1998, p. 274).

El análisis “[…] conduce a identificar un objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos” (Muñoz, 2006). Ha identificado la relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico “Si se pudieran establecer relaciones entre los actos de entendimiento de un concepto y los actos de entendimiento de un algoritmo, a partir de dos objetos de entendimiento distintos, no nos permitiría observar la génesis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vista como unidad dialéctica”. (Muñoz, 2006). En educación básica se puede entender un algoritmo como el producto final en la construcción de un concepto a través de su desarrollo problemático.

Sin embargo, los conceptos matemáticos son en sí, abstracciones del conocimiento humano, para su enseñanza se requiere por ende la construcción del concepto para ser asimilado por el educando. Así entonces se ha identificado que el proceso de desarrollo de la adquisición del conocimiento de lo concreto a lo abstracto; requiere tres elementos desarrollados en dos procesos: identificado en este estudio de lo natural-social a lo conceptual y del conceptual a lo algorítmico.

Nuestro enfoque es importante porque va un paso más atrás, parte de las prácticas milenarias para desarrollar un concepto hasta intentar formalizarlo. A diferencia del discurso matemático escolar tradicional que proporciona un concepto acabado o terminado con estructura algorítmica, solo se ejercita repetitivamente.

El siguiente diseño de actividades es una muestra del cómo se puede *rediseñar el discurso matemático escolar* partiendo de las prácticas milenarias y por diferentes tipos de mecanismos de mediación social puede ser compatible con entornos socioculturales, en particular de Chiapas. Dicho diseño de Actividades fue elaborado mediante Ingeniería Didáctica, pero cabe señalar que no partimos de un concepto matemático específico, sino de las prácticas como tal, en nuestro caso contar, medir y calcular. Con la ventaja de que dichas prácticas están presentes a lo largo de todo el currículo escolar como se evidencia en análisis de la dimensión didáctica. Para además agregar otros elementos que sirvan de herramientas en el aprendizaje no contenidos en el currículo, incluso de igual o mayor importancia que los que si se tocan en el programa de nivel básico.

Partiremos de la práctica de contar y desarrollaremos el sistema de numeración posicional en base 5, así también se medirá con una magnitud nunca utilizada en el nivel básico como es la intensidad luminosa, y se hará un pequeño cálculo en este contexto; el fin es dotar al educando de elementos de su entorno presentándolos de manera visible, y guiarlo a construir conceptos matemáticos hasta que entienda cómo se llega al algoritmo.

Diseño de Actividades Mediadoras

La siguiente practica es tomada de la tesina de este autor y publicada en Escuela de Invierno de Matemática Educativa (EIME) XVI por Muñoz y Constantino (2013, p. 190-197) consultada para su uso libre en el QR y link siguientes:

http://funes.uniandes.edu.co/16662/1/Mu%C3%B1oz2013Practicas.pdf

El análisis “A priori ” de la Secuencia de Actividades puesta a prueba en distintos niveles escolares, como talleres deja un análisis de lo que se espera en el desarrollo de la secuencia:

La introducción. Consta de un cuestionario en cual se le pide al educando las nociones generales que tiene de estos conceptos. Tiene como objetivo servir de referencia de cómo ven los educandos su educación institucional, qué noción tienen de las ciencias y las matemáticas, además de que rescatar las practicas del entorno.

La actividad 1.

Surge de la falta de construcción de conteo del sistema de numeración posicional de distintas bases de la diez. Haciendo referencia al contexto histórico como la maya para poner sobre la mesa el concepto en cuestión.

Se espera que los estudiantes realicen agrupaciones acomodadas en un orden específico para obtener una numeración de conteo en base cinco. Los estudiantes no identifican que han contado en sistema de numeración posicional, uso del cero y en esta base: cinco; pues no advierten aun la posición, el uso de cero, y desconocen que es una base de numeración pues siempre han realizado en base diez, sin conocer que en realidad, es una base numérica.

Posterior a ello se quiere observar cómo asimilan la noción de cero. Y las observaciones sobre agrupaciones. Con ello se pretende construir el sistema de numeración desde conceptos básicos posición, uso de cero y agrupaciones. Así como la posibilidad de usar determinadas otras cifras o no.

Para así luego de una breve explicación se pretende que el cuenten una colección de objetos que aumentan de uno en uno. Agrupando, pero ya con el conocimiento del sistema de numeración posicional en base 5.

Para después intentar lograr un primer ensayo de generalización a modo que traten de formalizar el sistema de numeración posicional; no se espera una formalización completa, sino que identifiquen que la práctica antecede al concepto y este a su vez, a la formalización de dichos conceptos a través de llegar a una ecuación.

Se muestra reglas de generalización y la ecuación general convenida para que realicen una comparación y observen si tiene similitud con lo elaborado, pues se espera identifiquen que la formalización surge de lo práctico.

La actividad 2.

En esta actividad la idea consiste en realizar una medición que los estudiantes no han realizado nunca antes, tampoco con reglas específicas, ni unidades de medidas convenidas, es decir, obtener una medición de intensidad luminosa solo con nociones generales y creando su propia unidad de medición, dándole algunos elementos para que esto así suceda.

Se les pide una unidad de medida, la toma de la medición y el proceso realizado para obtener la medida, así como una representación matemática de las acciones realizadas.

La actividad 3.

Pretende que el educando realice cálculos con apoyo de una medida dada en el contexto de la física, mediante una medida física, para calcular la intensidad luminosa de un edificio. Utilizando una unidad de medida conocida por la física: candelas. A fin de utilizar conceptos matemáticos para calcular y posteriormente para buscar una generalización matemática mediante un modelo.

Así como reforzar su conteo en bases distintas de la 10, como es la base 5. Por conteo o mediante la formalización.

1.5. Fase de experimentación y la puesta en escena

La puesta en escena se realizó en la Escuela Secundaria del Estado no. 2 en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. A estudiantes de tercer año del grupo “D” en horario extraclase con fechas programadas los sábados, en un horario de 9 a 11 horas. Se pidió que a los educandos no se inhibieran que estuvieran relajados ya que sus respuestas serían muy importantes, a la vez que se les explicó que no serían evaluados. La actividad fue llenada con pluma negra y roja.

Se invitó a un grupo de 30 alumnos en horario extra-clase de los cuales asistieron 13 estudiantes, 9 de ellos asistieron la actividad completa, 2 de ellos solo realizaron la actividad 1 y 2 de ellos solo realizaron la actividad 2. Solo se tomaron como válidas las secuencias completas los 9 alumnos, formaron 4 grupos al azar y quedaron 3 grupos de 2 estudiantes y 1 grupo de 3 estudiantes, de los 9 alumnos eran 3 niños y 6 niñas, se agruparon las niñas en grupos de 2, y los 3 niños realizaron un equipo. La introducción la contestaron individualmente y en equipo las actividades 1, 2 y 3.

Análisis *“A posteriori ”* de la Secuencia de Actividades.

En la introducción de la Secuencia de Actividades se analizó principalmente las nociones sobre ciencia y matemáticas, y las prácticas, en la siguiente tabla se colocan las nociones más relevantes (evidencia de nueve estudiantes de secundaria):

Tabla 7. Nociones sobre ciencia y matemáticas evidencia de nueve estudiantes de secundaria.

Concepto	***Noción 1***	***Noción 2***	***Noción 3***
Educación	Aprendizaje	Escuela	
Conocimiento	Conocer	Capacidad personal	
Ciencia	Naturaleza	Medio de investigación	Experimento
Matemáticas	Ciencia	Materia escolar	Fórmulas, número, problemas
Contar	Cantidad	Numero	Objetos
Medir	Longitud	Peso	Objetos
Calcular	Aproximación	Conocer medidas	Azar
Prácticas sociales	Dinero	Cosas	

Fuente: Elaboración propia basada en resultados.

En la actividad 1

Numero obtenido de las agrupaciones

Todos los equipos realizaron las agrupaciones correctamente, no tienen idea que contaron en base 5; ejemplos:

Equipo 2.

1. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras A? 0 4 3
2. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras B? 1 2 0
3. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras C? 3 0 4

1. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras A? 0 4 3
2. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras B? 1 2 0
3. ¿Qué número obtuviste con el grupo de piedras C? 3 0 4

Noción del cero en agrupaciones

Significa ausencia, ninguna, no se completan, cero o nada ya se convierte en otro grupo.

Equipo 3.

4. ¿Qué significa el cero en la pregunta 2, del grupo de piedras B? ¿explica porque queda en cero?

por que no queda ninguna piedra sobrante
el cero significa el numero de piedras sobrantes.

Equipo 3.

5. ¿Qué significa el cero en la pregunta 3, del grupo de piedras C?¿explica porque queda en cero?

Significa el numero de bolsas. queda en cero
porque al ser solo 5 bolsas se convierte en
vara.

Uso de otras cifras

Responden que sí, argumentando que se pueden hacer agrupaciones de distintos tamaños de 6, 7, 8, etc.

Equipo 1.

7. ¿Pudieras colocar otra cifra, como el 5, 6, 7, 8 u 9, en la forma de conteo que usaste con agrupamientos de 5? ¿Por qué?

Si se pudiera por que con de 6 en 6 y tales no Sobrara bolsa ni esieramos ningon bara.

Equipo 1.

8. Conclusiones: anota tus conclusiones (debate con tu equipo)

Concluimos que sobran semillas dependiendo el numero de semillas que le pongamos a las bolsitas o asi de diferente numero 6 7 8 0 9 =

Contando en sistema de numeración posicional con la ayuda de esquemas

Algunos equipos agruparon sobre el esquema para realizar su conteo, fijándose en la posición, uso de cero y utilización de cifras, en esta parte se contaba en sistema de numeración posicional en base 5 a razón de que eso es lo que hacen ante una breve explicación que esto es así

Equipo 1.

11. Intenta completar la tabla siguiendo la explicación anterior.

Número	Objetos	Número	Objetos
0		20	••••••••••
1	•	21	•••••••••••
2	••	22	••••••••••••
3	•••	23	•••••••••••••
4	••••	24	••••••••••••••
10	•••••	30	•••••••••••••••
11	••••••	31	••••••••••••••••
12	•••••••	32	•••••••••••••••••
13	••••••••	33	••••••••••••••••••
14	•••••••••	34	•••••••••••••••••••

Equipo 1.

11. Intenta completar la tabla siguiendo la explicación anterior.

Número	Objetos	Número	Objetos
0		20	••••••••••
1	•	21	•••••••••••
2	••	22	••••••••••••
3	•••	23	•••••••••••••
4	••••	24	••••••••••••••
10	•••••	30	•••••••••••••••
11	••••••	31	••••••••••••••••
12	•••••••	32	•••••••••••••••••
13	••••••••	33	••••••••••••••••••
14	•••••••••	34	•••••••••••••••••••

Intento de generalización

Esta parte fue complicada para algunos de ellos, sin embargo, algunos de ellos si se aproximaron a la estructura de polinomio de cómo se expresan formalmente los sistemas de numeración posicional en cualquier base. Cabe señalar que no se esperaba la forma completa sino una primera aproximación.

Equipo 3.

15. Escribe una formula generalizada para describir los números posicionales. (apóyate de tu construcción anterior).

N+S=N

ó

N(b)+N(S)=b

Equipo 4.

14. Escribe la formula anterior usando solo una literal de la palabra que hallas elegido, de cada grupo para representar un número.

$S_1 + S_2 + S_3 = N$

N= Numero de piedras S1= Semillas S2= bolsas S3 = Vasas

Similitud al sistema de numeración posicional formalizado.

A algunos equipos quedo más claro que otros, pero en general observan la similitud. Para efectos de la secuencia basta con observar las estructuras.

Equipo 2.

Qué relación encuentras entre lo que elaboraste anteriormente con este texto sobre la formalización:

Es que la 1 regla es b=1 1=1 y solo utilizamos 4 num. queso 1,2,3,4 y comob es la unidad simple 5 igual.

Equipo 3.

Qué relación encuentras entre lo que elaboraste anteriormente con este texto sobre la formalización:

que resolvimos. el problema mediante esta formula, solo que al principio nos plantearon el problema y nosotros tuvimos que resolverlo para saber la formula

Actividad 2

Invención de una unidad de medida equivalente a la intensidad luminosa de una vela.

Todos los equipos preguntaron que no entendían la pregunta, luego de una breve explicación inventaron su unidad de medición y midieron la intensidad luminosa.

La llamaron vela, luminosas y cera.

Equipo 2.

Elige tu unidad de medida (crea una unidad): luminosos.

1. ¿Cuántas unidades de medida de intensidad luminosa utilizaste para lograr el brillo luminoso de la figura 1?

con 3 unidades.

Equipo 2.

Elige tu unidad de medida (crea una unidad): Cera

1. ¿Cuántas unidades de medida de intensidad luminosa utilizaste para lograr el brillo luminoso de la figura 1?

3 varitas de Cera

Distintos métodos para medir (noción de medición)

Esta es la forma como un equipo expresa las acciones realizadas para obtener la medida (su propio método para medir). Para posterior intentar una expresión matemática.

Equipo 4.

2. ¿Qué acciones realizaste para obtener la medida?

Ir poniendo las velas una por una & ver la dencidad de iluminación del cuarto

3. ¿Escribe como representarías matemáticamente las acciones que realizaste?

$V+V+V=L$

$(V=\text{velas})\ (L=\text{luz})$

Actividad 3

Cálculo de intensidad luminosa en un edificio en candelas.

Ya con la noción de lo que se estaba haciendo bajo ese mismo contexto se les pidió realizar un cálculo para la iluminación de un edificio.

Surgen las operaciones básicas: multiplicar (suma abreviada)

Equipo 1.

¿Cuántas candelas necesitas para iluminar todo el edificio?

Se necectaria 80 candelas

¿Qué operaciones realizaste matemáticamente para obtener el resultado?

multiplicamos 4x4 nos dio 16 y de ai multiplicamos la cantida 16 por 5 cuarto nos dio 80 eso es el Resultado

R: 80

Reforzar el conteo en base 5, conociendo el resultado 80 como sería este número en base 5

Era difícil imaginar cómo resolverían esta pregunta. Si intentando resolver el algoritmo evidenciado o contando objetos físicos. La forma como lo hicieron fue variada:

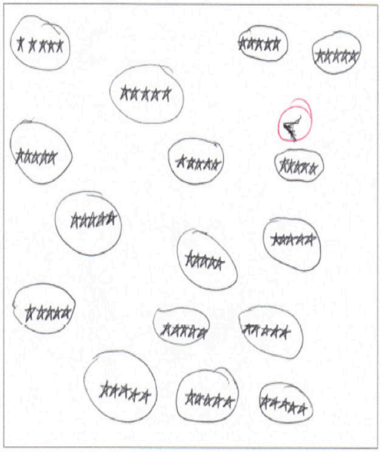
1. Con ecuación (difiere)
2. Esquemáticamente (logrado)
3. Aritméticamente (aprox.)
4. Esquemáticamente (aprox.)

Un equipo difirió del número, dos equipos se aproximaron, su resultado fue 16 porque solo llegaron a la primera agrupación y un equipo logró obtener el numero esperado 310 en base 5.

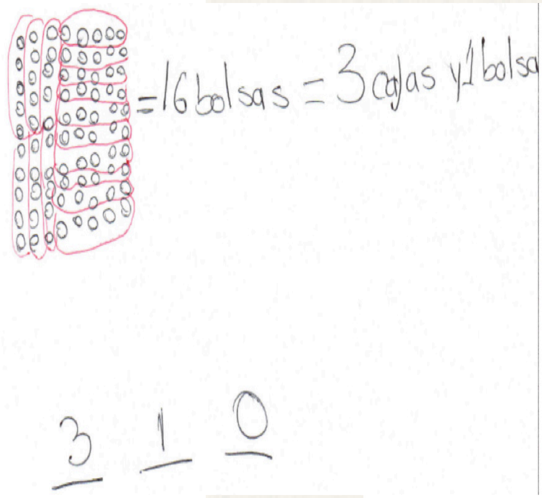
Equipo 3.

Cuartos	Velas
1	5
2	5
3	5
4	5
5	5
6	5
7	5
8	5
9	5
10	5
11	5
12	5
13	5
14	5
15	5
16	5

Equipo 4



Equipo 2.



Análisis de validación

Encontramos resultados de enorme relevancia ante lo esperado y lo realmente obtenido y lo evidenciaremos a manera de dejar el debate sobre este escrito:

1. Se comparó el diseño de la secuencia a través de los resultados esperados “a priori” con los resultados no esperados “a posteriori” y se encontró que un estudiante si es capaz de construir desde las prácticas un concepto matemático.
2. A través de agrupamientos físicos se construyó el sistema de numeración posicional rescatando principalmente, el uso de cero y la posición de los números.
3. Fueron capaces de crear su unidad de medida (de una magnitud nunca utilizada de intensidad luminosa), explorando formas y métodos para utilizarlas.

4. Se observa la aparición de la modelación mediante la influencia de las praxeologías, en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.
5. Las producciones de los estudiantes fueron muy variadas, pero convergentes, lo cual promueve la creatividad científica, y refuerza sus argumentos ante la construcción del conocimiento matemático. (Algo muy poco explorado y valorado en la institución escolar, debido a los tiempos de enseñanza).
6. La observación de que el sistema de numeración posición la utilización de la base es en sí, una medida, esto se hace evidente en la pregunta 7 de la actividad 1. Donde se esperaba que respondieran que no se podían usar otras cifras como el 5, 6, 7, 8, o 9 en las agrupaciones de 5. Sin embargo, los educandos interpretaron "si es posible agrupar con cifras diferentes de 5" por lo cual su respuesta fue que sí, dejando en evidencia que el uso de la base es tomado como una unidad de medida. Era difícil imaginar en primera instancia que esto era así, sin embargo, las evidencias respaldan esta deducción, dejando a tela de juicio para el lector si esto es de esta manera o se podría tener una interpretación diferente.
7. Se observa la aparición de la predicción en el momento de que educando intenta calcular. Esto quiere decir que la predicción estudiada en distintos trabajos en la disciplina de matemática educativa, dentro de estudios socioepistemológicos, si aparece, siempre que se quiera calcular.
8. Se observa la aparición de la convención, cuando ellos identifican sus modelos generales debaten para representar una formula general, la formalización es por convención, un elemento que no se discute, en ningún nivel de la educación básica.
9. Se demostró a través de una secuencia de actividades mediadoras que no hay prioridad en la formalización y que la práctica favorece el entendimiento y la construcción del conocimiento matemático.

Fragmento de secuencia de actividades a estudiante de primaria

Con el fin de dejar evidencia si es pertinente estudiar a través del conteo el sistema de numeración posicional con bases diferentes de 10, y si es favorable para un educando de nivel primaria, se realizó parte de la secuencia diseñada en esta investigación a fin verificar la producción del niño frente al entendimiento de conteo en distinta base de numeración a la conocida base 10, a continuación, presentamos los resultados:

La puesta en escena hecha a un estudiante varón, que concluyó el segundo año, e iniciará tercero de primaria, de edad de 7 años. Se le presento la introducción de la secuencia y parte de la actividad 1, la parte de los agrupamientos de la pregunta 1 a la pregunta 8, sobre el razonamiento de las agrupaciones, uso de cero, y observación de la posición. Y se procedió a explicar lo que era un sistema de numeración posicional, para luego pedirle por último que expresara con palabras lo que había hecho.

Introducción

Se dejó al educando poner lo libremente sobre los conceptos presentados, ocurrió que no contestó todos los conceptos, pues no tenía una idea básica con la que pudiera argumentar algunos como se evidencia.

Relaciono conocimiento con aprender.

Matemáticas con operaciones básicas.

1. ¿[redacted]: apreder
2. ¿Ser mui bien estudiate
3. ¿aPreder más
4. ¿
5. ¿sumas, resta, multiPlicasion
6. ¿Para Vivir
7. ¿
8. ¿[redacted]
9. ¿Para resolber lasumas
10. ¿

En la actividad 1

Numero obtenido de las agrupaciones

Realizó las agrupaciones correctamente, en esta etapa como se sabe desconoce que es una base de numeración, lo cual demuestra que la práctica favorece la construcción del conocimiento matemático.

ANOTA EL NÚMERO DEL GRUPO A

0	4	3

ANOTA EL NÚMERO DEL GRUPO B

1	2	0

ANOTA EL NÚMERO DEL GRUPO C

3	0	4

1. ¿Qué número obtuviste con el grupo de semillas A? 0 4 3
2. ¿Qué número obtuviste con el grupo de semillas B? 1 2 0
3. ¿Qué número obtuviste con el grupo de semillas C? 3 0 4

Noción del cero en agrupaciones

El cero significa: no sobra, no queda ninguna.

4. ¿Qué significa el cero en la pregunta 2, del grupo de semillas B? ¿explica porque queda en cero?

que no sobro semillas en el brdco B

5. ¿Qué significa el cero en la pregunta 3, del grupo de semillas C? ¿explica porque queda en cero?

que no quedo ninguna bolsita 5 semillas

Uso de otras cifras

La pregunta 7 no fue entendida, se le explicó si podía contar haciendo diferentes agrupaciones de 8, 16, 20; a lo que, al escuchar números grandes respondió se le haría difícil.

La pregunta 8 demostró el gusto por la actividad.

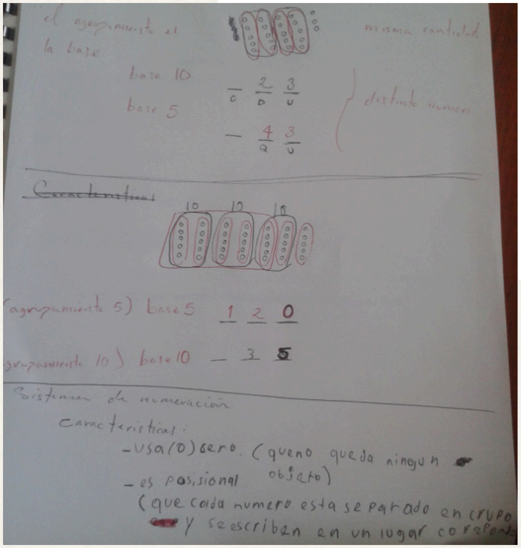
7. ¿Pudieras colocar otra cifra, como el 5, 6, 7, 8 u 9, en la forma de conteo que usaste con agrupamientos de 5? ¿Por qué?

no por que se me ase muy dificil para mi

8. Conclusiones: anota tus conclusiones (debate con tu equipo)

me gusto cuando me tia las semillas en la bolsa y veia cuanto tenia cada bolsa

Explicación sobre lo elaborado por parte del investigador y argumento del educando de 7 años sobre el sistema de numeración posicional.



Argumento de un estudiante de 7 años sobre el sistema de numeración posicional:

- Usa cero (que no queda ningún objeto)
- Es posicional (que cada número está separado en grupos y se escriben en un lugar que le corresponde)

1.6. Consideraciones finales

La problemática en la institución escolar es que en el discurso matemático escolar del nivel básico y media superior, los conocimientos se enseñan como un producto terminado, no se actualizan los contenidos del currículo matemático, la forma de enseñanza cambia continuamente, en modelos con acento a lo pedagógico, con acento a las situaciones en algunas disciplinas, con acento a las competencias; de la forma que sea, si los contenidos no se reconstruyen, ni se modifica la forma de enseñanza de una estructura natural-social (concreta), poniendo en juego la manera en la que el ser humano ha desarrollado los saberes usando diversos mecanismos de mediación social: desde una práctica extraída de la naturaleza o práctica de un grupo social hasta el concepto inicial, y seguir hasta construirse poco a poco y por último llegar a un producto terminado (abstracto relativamente), sea generalización o formalización.

El estudio histórico-epistemológico demuestra, como hemos visto, que las actividades prácticas milenarias de contar, medir y calcular, que a lo largo del tiempo los seres humanos hemos desarrollado a través de marcas en el paleolítico, hasta la invención de numeración escrita por los sumerios, uso de cifras, hasta llegar a un sistema de numeración posicional optima, es un proceso continuo de mediación social con sucesivas abstracciones de la naturaleza para el uso de la sociedad.

En el caso de la medición surgen de intentar medir abstracciones de la naturaleza, con medidas arbitrarias hasta llegar a la convención por mediación social de un sistema de medición de magnitudes físicas (de una civilización avanzada hacia una comunidad científica), que de alguna forma dispara el desarrollo en los saberes científicos y la tecnología a beneficio de la sociedad. El cálculo se inició con piedras y guijarros, hasta la escritura en papiros, se desarrollan las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, para posteriormente realizar estructuras más complejas, en documentos con grabados existen evidencias de la realización del uso de cálculos para obtener resultados sobre cualquier campo, los primeros de ellos con uso en el comercio, los tributos que dependían midiendo tierras en Egipto, hasta llegar a un cálculo que tiene la capacidad de ser instantáneo, surgido de la mecánica, emigrando por mediación social a cualquier disciplina (el cálculo infinitesimal).

Por lo que una mirada minuciosa al programa de estudios, nuestro análisis muestra que las prácticas de contar medir y calcular, articulan de manera transversal a través de todo contenido escolar los conceptos matemáticos estudiados en la escuela del nivel básico, por lo que a partir de ellas es posible rediseñar el discurso matemático escolar. La secuencia de actividades mediadoras presentada como resultado de este estudio, demuestra la manera del cómo es posible hacerlo.

La puesta en escena de dicha actividad implica resultados incluso no esperados; entre los resultados esperados se encuentra que se pueden hacer construcciones matemáticas a través de las actividades prácticas, que si bien se controlan los momentos en la secuencia de actividades, al momento de realizar construcciones propias, los educandos pueden tener formas de expresarse muy variadas, pero no se puede ser estricto ante la creatividad y las distintas formas de expresión, lo que sí se puede hacer es identificar patrones de similitud de lo que se está buscando, además de cómo es evidente en las actividades de la secuencia, los educandos no muestran prioridad del concepto acabado, es decir, en la formalización, sino favorecen la construcción y entendimiento del mismo a través de las prácticas.

De los resultados no esperados fueron muy alentadores; la observación de que, en el sistema de numeración posicional, la utilización de la base es en sí, una medida, esto se hace evidente en la pregunta 7 de la actividad 1. Donde se esperaba que respondieran que no se podían usar otras cifras como el 5, 6, 7, 8, o 9 en las agrupaciones de 5. Sin embargo, los educandos interpretaron “si es posible agrupar con cifras diferentes de 5” por lo cual su respuesta fue que sí, dejando en evidencia que el uso de la base es tomado como una unidad de medida. Era difícil imaginar en primera instancia que esto era así, sin embargo, las evidencias respaldan esta deducción, dejando a tela de juicio para el lector si esto es de esta manera o se podría tener una interpretación diferente.

Se observa la aparición de la predicción en el momento de que educando intenta calcular. Esto quiere decir, que la predicción estudiada en distintos trabajos en la disciplina de matemática educativa, si aparece, siempre que se quiera calcular.

Se observa la aparición de la convención, cuando ellos identifican sus modelos generales debaten (otra forma de mediación social) para representar una formula general, debido a que la formalización es por convención, un elemento que no se discute en ningún nivel de la educación básica.

Los objetivos a alcanzados evidencian que con la secuencia de actividades mediadoras es posible:

i. a través del conteo desarrollar el sistema de numeración posicional en distintas bases.

ii. a través de la medición desarrollar unidades de medida arbitrarias y utilizar magnitudes presentes en el entorno, y desarrollar métodos de uso.

iii. a través del cálculo, buscar la creatividad del educando, al apuntar a la cuantificación del saber para lograr una generalización, elaborada por ellos mismos, es decir, se busca que comenzando desde las actividades prácticas ir a puntos de convergencia que se reflejen en forma matemática.

Como vimos es para llegar a la experimentación de cómo es posible construir el sistema de numeración posicional desde la práctica, nos basamos en estudios histórico-epistemológicos del conocimiento matemático, estas concepciones se incorporan en este libro deliberadamente, ya que no es posible arrancarlas en la concepción desde donde se desarrolla el conocimiento matemático, ni de la comprensión cognitiva de como aprendemos a lo largo de la historia, simplemente dejar de hacerlo, supone un paso atrás en el avance del conocimiento científico, que hemos alcanzado a través del tiempo. Esperamos que con esta mirada ampliada que hemos despertado en el lector, se pueda acompañar la obra desde la libertad de explorar nuevos caminos y formas complementarias del conocimiento matemático. También, que este primer capítulo haya contribuido en una nueva mirada de entender lo matemático, e incentive nuevos modos, nuevas maneras para su enseñanza, aprendizaje o autoaprendizaje.

CAPÍTULO 2
ORIGEN HISTÓRICO SOCIAL DEL ÁLGEBRA: EL "AHA" COMO MEDIACIÓN PARA MEDIR Y CALCULAR LA CONSTRUCCIÓN DE UNA CASITA

María de los Ángeles Demeneghi Gasperin

Introducción

Se presenta el origen histórico del álgebra desde las civilizaciones más antiguas, en el plano social se orienta para entender la cosmovisión y el cambio de pensamiento numérico al pensamiento algebraico en las actividades prácticas de contar, medir y calcular. Con base en lo anterior se diseñaron diversas actividades mediadoras para la educación básica.

2.1 ¿Cómo surge el álgebra?

En la génesis histórica, se inventó socioculturalmente por necesidades de reparto de víveres, salarial o de tierras, los escribas tuvieron que ser capaces de solventar distintos problemas, los cuales podrían ser reescritos en nuestros días como ecuaciones de primer grado o incluso como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por su cosmovisión, el egipcio no distinguía entre problemas estrictamente aritméticos y problemas en los que necesitaba resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. Para él todo eran matemáticas y se limitaba a seguir procedimientos aritméticos. En el antiguo Egipto no se empleaba la notación que se usa actualmente, sino que se pedía por ejemplo buscar un número, que ellos llamaban “aha” o *montón tal que.*

2.2. Secuencia de actividades para la Mediación Social

Estas actividades se aplicaron a dos niñas, de 8 y 10 años de edad, que cursaban el 2° y 5° de primaria.

Material a utilizar:

- Reglas de unicel de 2 x 10cm y de 2 x 8 cm.
- Triángulos de unicel.
- Alfileres, cinta diurex, resistol.

Actividad 1

A Sofía le compraron una casita de muñecas que es armable y las instrucciones para su construcción son las siguientes:

La base de la casita debe ser 5 veces más grande que lo que mide una viga para hacer la pared.

Para hacer las paredes se necesitan 4 vigas de igual tamaño y tres de las paredes de la casa son iguales y una pared está hecha con vigas que miden ¾ partes de lo que miden las vigas normales.

Para hacer el techo se necesitan 10 vigas de tamaño normal y 2 triángulos.

¿Cuántas vigas se necesitan para hacer esa casita?

¿Cuántos triángulos se necesitan para hacer esa casita?

¿Cómo elegiste la base de la casita?

¿Qué tiene que hacer Sofía si quiere una casita de dos pisos?

¿Cuántas vigas más tiene que agregar?

¿Cuántos pisos agregarás a la casita?

¿Aumenta la cantidad de vigas del techo? ¿Por qué?

Posteriormente, Sofía quiere una casita más grande, el piso de la casa tiene el doble de las vigas del principio.

¿Cuántas vigas necesitan para hacer la casita?

Análisis a priori

Derivado de la manera histórica como se fue desarrollando el álgebra en diferentes culturas, se sabe que la principal causa de su creación fue la necesidad de repartir y contabilizar riquezas o propiedades de manera igualitaria, lo que por ejemplo llevó a desarrollar a los antiguos egipcios en sus problemas cotidianos un valor cualquiera que llamaban "aha" (montón tal que), el cual les ayudaba a plantear un valor desconocido como conocido y de esta forma encontrar la solución a la problemática de una situación en la vida diaria de aquellos días.

Desde la primaria se inicia la enseñanza de los símbolos de suma, resta, multiplicación y división además del signo igual.

De manera que, les enseñan las operaciones aritméticas de manera común, es decir, 6 + 2 = 8; 6 – 2 = 4; 6 x 2 = 12; 6 / 2 = 3.

Cuando los niños ya son capaces de entender este conocimiento, es cuando empiezan a tener ejercicios de sucesiones, por ejemplo:

Dibujen los elementos que faltan en la sucesión.

Explique cómo decidieron que figuras debían dibujar.

Después les piden que encuentren el número perdido, en una sucesión, por ejemplo:

Entre los cuatro números que están a la derecha, identifiquen los que faltan en las casillas de cada sucesión y escríbanlos donde corresponde y expliquen cómo los encontraron.

50	56	62		74	

69 80 71 68

$3 + \_\_ = 10$; $10 - \_\_ = 4$

Si bien estas operaciones no tienen en sí una incógnita, son ecuaciones algebraicas de primer grado, ya que en ellas se requiere encontrar el número perdido o faltante.

Ahora bien, siguiendo el ejemplo de los antiguos egipcios, a continuación, se plantea una actividad de construcción de una casita, la cual deberán armar según las instrucciones. Con esto se pretende que los alumnos por medio de la construcción de la casita puedan palpar y armar según las instrucciones y su imaginación al tener físicamente el objeto para que puedan llegar a deducciones sin tantas complicaciones resolviendo un problema que es de la vida cotidiana, como la construcción de una casita.

Esta actividad se planteará a 2 niñas de diferentes grados escolares y se pretende que con los conocimientos ya adquiridos puedan resolver de diferentes formas el problema planteado. Lo primero que tendrán que hacer las niñas es construir según las instrucciones para determinar de primer momento cuantas vigas y triángulos necesitan.

Para determinar cuántas vigas utilizarán para la base tendrán que deducir y formar un cuadrado o bien multiplicarán o sumarán el ancho de las vigas con respecto al largo de las mismas para que puedan obtener un cuadrado y sobre él construir las paredes de la casita o en su defecto podrán armar la base de forma visual sin medidas ensamblando las vigas hasta que formen un cuadrado.

Para hacer las paredes, tendrán que pensar en la posición de las vigas y se darán cuenta que es en posición horizontal y empezarán a formar las paredes de la casita, después tendrán que colocar los triángulos y las vigas del techo las cuales irán de forma inclinada y de forma vertical.

Una vez que tienen armada la casita base, se les pide que construyan una casita de dos pisos, se espera que solo quiten las vigas que van en el techo y los triángulos, luego que puedan formar otro piso asentado en las paredes del primer piso y armen el segundo de igual forma del primero.

Y a su vez tienen que ir asociando la cantidad de pisos con el material que requieren para su construcción. Y de esta manera pueden llenar la tabla para que numéricamente vayan asociando las proporciones.

La actividad de hacer la casa del doble de su tamaño original, en este paso tendrán que notar la diferencia en cuanto a que la distribución de la casa y que el material si varía, ya que en este caso las vigas del techo se duplican y de igual manera las paredes y el piso, y que los triángulos son los únicos que se mantienen siempre con el mismo número de piezas en todos los casos.

De las actividades que se plantearon en un principio, solo llevará a cabo la que consiste en construir una casita, ya que para fines de la demostración que se quiere, esta actividad es la más adecuada.

Puesta en escena (experimentación)

De acuerdo con todo lo anterior se diseñó específicamente una actividad para la puesta en escena, que le llamamos "La casita de Sofía", que se describe a continuación:

Figura 1. La casita

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

A Sofía le compraron una casita de muñecas armable y las instrucciones para su construcción son las siguientes:

- La base de la casita debe ser 5 veces más grande que lo que mide una viga normal para hacer la pared.
- Tres paredes de la casita tienen el mismo tamaño y para construirlas necesitas 4 vigas normales para cada pared.
- La cuarta pared se hace con cuatro vigas que miden la mitad que una viga normal, para que así se forme la puerta de la casita.
- Para hacer el techo se necesitan 10 vigas de tamaño normal y 2 triángulos.

¿Cuántas vigas se necesitan para hacer esa casita?

¿Cuántos triángulos se necesitan para hacer esa casita?

¿Cómo elegiste la base de la casita?

¿Qué tiene que hacer Sofía si quiere una casita de dos pisos?

¿Cuántas vigas más tiene que agregar?

¿Cuántos pisos agregarás a la casita?

¿Aumenta la cantidad de vigas del techo? ¿Por qué?

Ahora Sofía quiere una casita más grande, el piso de la casa tiene el doble de las vigas del principio.

¿Cuántas vigas necesitan para hacer la casita?

Cómo resolverías esta tabla siguiendo las instrucciones que ya conoces, ver figura 2.

Figura 2. Tabla para concentrar el número de vigas.

	Vigas de la base de la casita	Vigas Normales para las paredes	Vigas Cortas para la pared	Vigas para el techo	Triángulos	Total de Vigas Normales	Total de Vigas Cortas	Total de Vigas para el Techo	Total de Triángulos
Casita de 1 piso									
Casita de 2 pisos									
Casita de 3 pisos									
Casita de 4 pisos									

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Análisis a posteriori

Al llevar a cabo la actividad se encontró que a las estudiantes no les fue tan sencillo acatar las instrucciones para hacer la casita, ya que al encontrarse con un lenguaje no conocido en su totalidad por ellas, al hablar del doble de la viga normal, por ejemplo al preguntarle a Sofía qué entendía por el doble, ella respondió en un principio que no sabía pero le dije que me comentara lo que ella entendió según la pregunta y respondió que eran 2, y volví a preguntar 2 de qué y la respuesta fue 2 pisos de 4 vigas.

Después una de las instrucciones hablaba de una viga que media la mitad de la viga normal, pero no supieron identificar la pieza ya que al preguntar cuál era la mitad de la viga, una de las estudiantes tomó una viga normal y señaló que la mitad era aproximadamente ¾ de la viga en realidad, y lo que pasó es que al no tener la noción de fracciones ella tomó como la mitad lo que ella consideró le hacía falta a la casita; es decir, las dos estudiantes traían en mente una casita y así como se la imaginaron la armaron tratando de llevar a cabo lo que decían las instrucciones. En este caso la imagen que tenían ellas de cómo debía ser la casita influyó mucho en el resultado final de construcción.

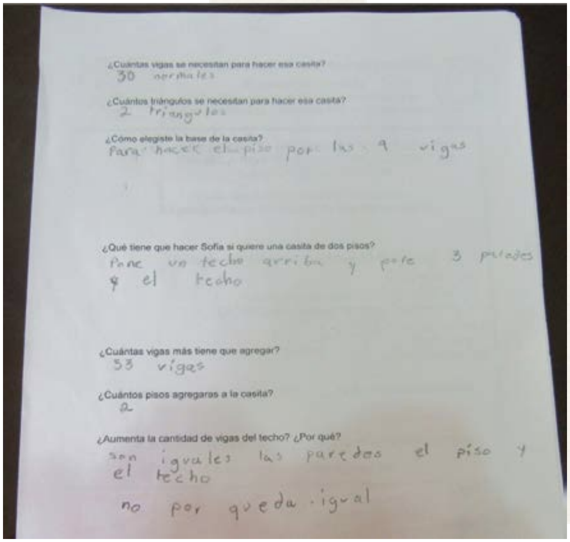
Después de armada la casita contestaron unas preguntas, las cuales fueron respondidas con ayuda del prototipo que ya había hecho.

Al cuestionarles como harían una casita de dos pisos, ellas volvían a contar las partes de la casita inicial, pero en dos ocasiones para que ellas obtuvieran el total de las vigas para una casita de dos pisos. En este caso también el techo lo sumaban dos veces.

Al responder cuántas vigas necesitarían para una casita de tres pisos, es cuando empiezan a darse una idea de que ya tenían una cantidad anterior, es decir, el total de vigas para hacer una casita de dos pisos, y lo que hicieron fue que a esa cantidad le sumaron lo de una casita más, y de igual modo respondieron lo de la casita de 4 pisos.

Cuando se les pidió que respondieran cuántas vigas se necesitaban para una casita del doble de la base, lo que hicieron fue sumar las vigas de una casita y sumarlas de nuevo, como se puede observar en las hojas de trabajo de una de las niñas, ver figura 3.

Figura 3. Respuestas de una colaboradora.


¿Cuántas vigas se necesitan para hacer esa casita?
30 normales

¿Cuántos triángulos se necesitan para hacer esa casita?
2 triangulos

¿Cómo elegiste la base de la casita?
Para hacer el piso por las 9 vigas

¿Qué tiene que hacer Sofía si quiere una casita de dos pisos?
Pone un techo arriba y pone 3 paredes
y el techo

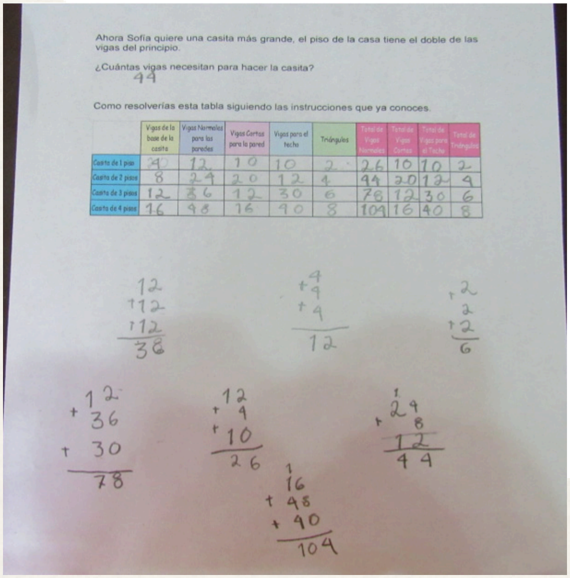
¿Cuántas vigas más tiene que agregar?
53 vigas

¿Cuántos pisos agregaras a la casita?
2

¿Aumenta la cantidad de vigas del techo? ¿Por qué?
son iguales las paredes el piso y
el techo
no por queda igual

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 4. Evidencia del llenado de la tabla



Ahora Sofía quiere una casita más grande, el piso de la casa tiene el doble de las vigas del principio.

¿Cuántas vigas necesitan para hacer la casita?

44

Como resolverías esta tabla siguiendo las instrucciones que ya conoces.

	Vigas de la base de la casita	Vigas Normales para las paredes	Vigas Cortas para la pared	Vigas para el techo	Triángulos	Total de Vigas Normales	Total de Vigas Cortas	Total de Vigas para el Techo	Total de Triángulos
Casita de 1 piso	4	12	10	10	2	26	10	10	2
Casita de 2 pisos	8	24	20	12	4	44	20	12	4
Casita de 3 pisos	12	36	12	30	6	78	12	30	6
Casita de 4 pisos	16	48	16	40	8	104	16	40	8

$12 + 12 + 12 = 36$

$4 + 4 + 4 = 12$

$2 + 2 + 2 = 6$

$12 + 36 + 30 = 78$

$12 + 4 + 10 = 26$

$24 + 8 + 12 = 44$

$16 + 48 + 40 = 104$

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 5. Cuando se le están explicando las instrucciones.

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 6. Construyendo la casita

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 7. La casita terminada

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Validación

Al comparar lo que se esperaba con lo que hicieron realmente las estudiantes, se puede decir que a la edad de 8 y 10 años, aún se les dificulta seguir las instrucciones para armar en este caso una casita, ya que las ideas que ellas tienen de cómo deben ser las casitas predominan, y las longitudes dependen de lo que ellas imaginen o piensen que es lo que tienen que hacer.

Por otro lado, después de la construcción y al responder las preguntas, también es claro que pueden responderlas con facilidad porque ya tienen un modelo del cual pueden partir para contestar sin titubeos.

Al hablar del doble del piso, aunque se les sugirió que podían poner el piso al lado del otro para hacer más grande la superficie del mismo, ellas decían que el piso era debajo del otro piso entendiendo que el piso era más grueso.

Lo relevante es que construyeran la casa como se la imaginaron para que pudieran tomar esa casita de referencia para la construcción de las casitas de 2, 3 y 4 pisos, lo interesante es que para que respondieran cuántas vigas utilizarían para construir una casita de 2 pisos, ellas todavía tomaban el modelo de la casa, es decir, necesitaban contar viga por viga físicamente, pero para la tercer y cuarta casita tomaron como base lo que habían contado de la casita de dos pisos y a esa cantidad solo le sumaron lo de una casita de un piso y lo mismo hicieron con la casita de 4 pisos.

Aunque todas sus operaciones fueron aritméticas, su pensamiento fue algebraico, ya que tomaron una cantidad desconocida (el “aha”) y la hicieron conocida siguiendo los patrones de construcción de la casita, además que la tabla que se les puso al final ayudó mucho para esta deducción.

Es decir, teniendo un modelo inicial y comprendiendo sus características y siendo tangible para su construcción, es más sencillo que las estudiantes entiendan de manera práctica a plantear, deducir y resolver la situación en cuestión, sin que esto cause desesperación o indiferencia para aprender y desarrollar habilidades algebraicas útiles que ayuden a comprender más rápido aunque no están explícitamente las variables o incógnitas, el pensamiento algebraico está presente porque ya tienen en mente que lo que buscan es el doble o el triple de la cantidad inicial aunque por la edad que tienen solo deduzcan y utilicen las sumas.

2.3. Consideraciones finales

Derivado de la dificultad que presentan los estudiantes para entender el álgebra, la forma en que se enseña solo permite resolver ejercicios sin dar oportunidad de construir un sentido de solución a problemas reales, ya que a los estudiantes se les enseña a sustituir fórmulas, memorizar reglas algebraicas, pero no se le da un sentido práctico y útil.

Cuando el estudiante aprende las operaciones aritméticas de sumar, restar, multiplicar y dividir; aprende el valor de los números y que a un número cualquiera se le puede sumar un número superior sin que afecte de ninguna manera el resultado de su signo.

Aprende que 5+6=11; pero escribe que 5-6=1; es decir, resta el número mayor del menor sin que importe la posición y su signo, el signo igual representa el resultado de la suma o resta que se le indique, al igual que con la multiplicación o la división.

Pero cuando se enfrenta con el álgebra, empieza a complicarse la enseñanza porque aquí sí importa la posición y el signo de la operación, anteriormente no podían llegar al resultado de 5-6= -1 ya que el signo negativo no existe en la aritmética o que -5-6= -11; el signo igual también toma otra connotación ya que lo que tiene del lado izquierdo no significa precisamente una igualdad del lado derecho, también aparecen las variables o incógnitas representadas por letras, y que estas a su vez representan un valor que desconocen y que tienen que encontrar para resolver la ecuación.

Ahora bien, la historia nos da la pauta para poder entender cómo surgió el álgebra y de acuerdo con la investigación, fue en el antiguo Egipto cuando se empezaron a plantear problemas reales que tienen solución algebraica. Por necesidades de reparto de víveres, salarial o de tierras, los escribas tuvieron que ser capaces de solventar distintos problemas, los cuales podrían ser reescritos en nuestros días como ecuaciones de primer grado o incluso como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El egipcio no distinguía entre problemas meramente aritméticos y problemas en los que se pide resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. Para él todo eran matemáticas y se limitaba a seguir procedimientos aritméticos. En el antiguo Egipto no se empleaba la notación que se usa actualmente, sino que se pedía por ejemplo buscar un número, que ellos llamaban “aha” o “montón tal que”.

En el Egipto antiguo toda la sociedad giraba en torno al río Nilo, el cual se utilizaba para los cultivos de la zona y para viajar de una parte de Egipto a otra. Pero la ayuda que el Nilo dio a las matemáticas fue enorme porque cuando el río Nilo crecía, los terrenos de alrededor quedaban inundados, y una vez que bajaba el nivel del agua, los propietarios de los terrenos tenían que medirlos y volver a delimitar los márgenes, cada vez que ocurría esto, y fue así como fueron apareciendo los instrumentos de medición.

Las matemáticas egipcias se refieren a aquellas escritas en el idioma egipcio. A partir del período helenístico, el griego sustituyó al egipcio como lengua escrita de los estudiosos de Egipto, y desde este punto las matemáticas egipcias se fusionaron con las griegas y las babilónicas para dar lugar a las matemáticas helenísticas.

El estudio matemático en Egipto más tarde continuó bajo el imperio árabe como parte de las matemáticas islámicas, cuando el árabe se convirtió en la lengua escrita de los estudiosos de Egipto.

Como ejemplo de las actividades que realizaban los antiguos egipcios, llevaban sus registros en papiros, el más importante para esta investigación es el papiro de Rhind o papiro de Ahmes, data del 1650 a.C, mide aproximadamente 6 metros de largo por 33 centímetros de ancho y su contenido es puramente matemático con 87 problemas planteados y resueltos.

El autor del mismo es un escriba llamado Ach-mosè también conocido por Ahmes. Actualmente el papiro se encuentra en el Museo Británico de Londres y comienza con la frase: “Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios”.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se supone que podría tener como finalidad el ilustrar a los futuros escribas en el ejercicio de sus actividades (relacionadas con la recaudación, con los repartos, etc.), por lo que la resolución de los problemas está escrita de modo pedagógico.

Además, en el comienzo del papiro, Ahmes hace alusión a que la escritura del mismo es una recopilación de información extraída de otros con 200 años de antigüedad, lo que lleva a suponer que la resolución de los problemas data del 1900 a.C aproximadamente.

Y como se observa en las actividades para la mediación social con las estudiantes, es importante para que un niño o niña adquiera un pensamiento algebraico de manera natural, tomar en cuenta problemáticas reales de su contexto cotidiano para que construyan ese pensamiento algebraico, es de suma importancia que no solo se les enseñe la manipulación de las reglas algebraicas sino que la introducción de este pensamiento algebraico sea compatible con su entorno sociocultural para que los estudiantes lo hagan propio y a través de sus deducciones puedan entenderlo.

Es necesario que el álgebra no solo sea visto como un montón de reglas sin sentido que solo sirven para encontrar el valor de una letra y nada más, sino que tiene usos prácticos y ayudan a las soluciones de problemas reales.

Por lo que esta actividad experimental (construcción de una casita) para la mediación social que realizaron las niñas, demuestra que las operaciones algebraicas se pueden resolver de manera natural, siempre y cuando se den las pautas necesarias para la construcción del conocimiento, es decir, crear ideas, formas en que se pueda entender el fin al que se quiera llegar, se reconoce que todas las operaciones que elaboraron las niñas fueron aritméticas pero su pensamiento fue algebraico (génesis cognitiva), ya que tomaron una cantidad desconocida (el “aha”) y la hicieron conocida, siguiendo los patrones de construcción de la casita, es decir, cualquier persona a cualquier edad podría resolver operaciones algebraicas, si encuentra el sentido y entiende lo que hace en la vida cotidiana.

Anexos (Evidencias de las estudiantes)

Figura 8. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 9. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 10. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 11. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

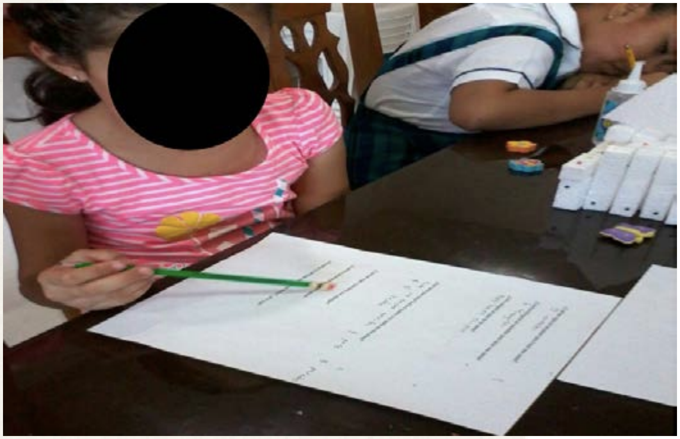
Figura 12. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 13. Trabajando con otra colaboradora

Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

Figura 14. Trabajando con otra colaboradora



Fuente: Demeneghi, M.A. (2019).

CAPÍTULO 3

UN ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE UN SISTEMA ALGEBRAICO ASOCIADO A LAS LEYES DE KIRCHHOFF: ACTIVIDADES DE PREDICCIÓN MEDIADAS POR TECNOLOGÍA

Edgar Javier Morales Velasco

Introducción

En nuestro contexto social, por naturaleza estamos midiendo, calculando y prediciendo. En este sentido, situaciones similares ocurren en el contexto escolar, excepto cuando un objeto de enseñanza en el contexto escolar se aborda abusando de la semiótica, es decir, abusando de la simbología y la abstracción, dejando al alumno con una falta de adquisición de conocimientos. Respecto a lo anterior, en Pardo (1998) se señala a la semiótica como aquella actividad que estudia las formas de representación que el hombre hace del mundo, dentro del proceso de interacción social y del proceso comunicativo. Mientras que para Bajtin y Vigotsky (1993) lo citarán como dialogismo; que es un conjunto de fases en las que, sin una interacción explicativa, comunicativa y comprensiva, no son posibles. En este caso, encontramos a nivel universitario problemas que surgen en la falta de comprensión de los conocimientos de física y matemáticas, debido a ciertos factores como: los estudiantes no vinculan estos conocimientos, es decir, ven sus asignaturas que solo necesitan estar acreditados. Estas materias se consideran una tarea difícil para los estudiantes ya que la física y las matemáticas en general se perciben como materias difíciles, rigurosas y formales. Esta visión genera un rechazo a su estudio, produciendo un clima de desmotivación. Mientras tanto, las prácticas pedagógicas de los docentes que realizan en las aulas, en lugar de facilitar el aprendizaje, dificultan este último a los estudiantes.

Muchos docentes todavía utilizan únicamente instrumentos didácticos como la pizarra o el proyector para informar a sus alumnos sobre los temas, además de asignarles ejercicios prácticos con un enfoque de enseñanza tradicionalista, lo que provoca que el alumno se enfoque en la misma rutina y pierda interés, ya que no hay creatividad en la implementación de nuevas formas de enseñanza-aprendizaje. Por otro lado, los docentes carecen de cierta actualización para implementar actividades que sean significativas para los estudiantes, porque la mayoría de quienes imparten clases carecen de ciertas pedagogías docentes (Morales, 2020).

De lo anterior surge la necesidad de formular preguntas de investigación que permitan dar una explicación o proponer soluciones al problema, por lo que nuestra pregunta de investigación es: ¿cómo los simuladores en física y matemáticas permiten a los estudiantes comprender su entorno?

3.1 Epistemología de las leyes de Kirchhoff

En (EcuRed, s.f.; Foro histórico de telecomunicaciones, s.f.) señalan que las leyes de Kirchhoff fueron instituidas en 1845 y fueron llamadas “leyes de Kirchhoff” en distinción a su autor Gustav Robert Kirchhoff, este se apoyó en la hipótesis del físico Georg Simon Ohm, en la que se diferencia como una ramificación de la ley de conservación de la energía y puede darse su utilidad en el cálculo de voltajes, corrientes y resistencias de una malla eléctrica. Estas leyes nos permiten establecer la intensidad de la corriente y la diferencia de potencial en cualquier nodo de un circuito eléctrico y sus elementos, con tensiones variables en el tiempo (Foro histórico de las telecomunicaciones, s.f.). Dichas leyes se enunciado como sigue:

- Primera ley de Kirchhoff o ley correspondiente a los nodos: en cada nodo de un circuito, la suma de las intensidades entrantes es igual a la suma de las salientes, es decir, la suma de las corrientes que pasa por el nodo es cero (Foro histórico de las telecomunicaciones, s.f.).

- Segunda ley de Kirchhoff o ley correspondiente a las mallas: en un circuito cerrado de una red, la suma del conjunto de caídas de tensión en sus componentes es igual a la suma de las tensiones suministradas y, por tanto, la suma algebraica de las diferencias de potencial en una malla es cero (Foro histórico de las telecomunicaciones, s.f.).

Dichas leyes fueron explicadas alrededor del año de 1846 por el propio ingeniero Gustav Kirchhoff y las cuales son uno de los fundamentos más significativos tanto en el área de la ingeniería eléctrica como electrónica. Este par de reglas de los circuitos eléctricos se sustentan en las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, históricamente fue Kirchhoff quien postuló estas hipótesis antes que Maxwell y, a su vez, fue George Ohm quien realizo de forma pública estas hipótesis. Según datos históricos, Kirchhoff informó en 1845 de un estudio sobre "el flujo de electricidad en una placa circular", origen de su trabajo doctoral (Foro histórico de telecomunicaciones, s.f.).

En el (Foro Histórico de las Telecomunicaciones, s.f.) se menciona que la originalidad de estas dos hipótesis condujo a Kirchhoff a obtener un apoyo económico para continuar sus estudios en la ciudad de París. Pero los conflictos políticos en Europa, que llevaron a la guerra franco-prusiana en 1870, lo desanimaron y, tras obtener el grado en 1847, trabajó como Privatdozent (profesor no asalariado) en la Universidad de Berlín, años más tarde trabajó como profesor asistente de física en la Universidad de Breslau.

3.2 La enseñanza de las leyes de Kirchhoff en el contexto escolar

Dentro de nuestra investigación, encontramos que en Brousseau (1986, citado en Morales, 2020) señala que la enseñanza de un gran número de docentes utiliza “analogías”, es decir, a los estudiantes se les enseña con ejemplos y se les resuelve de manera matematizada, lo que se convierte como guía a los estudiantes para que puedan trabajar sin problema de las actividades que se presentan en los libros, pero, provocando poca comprensión de los fenómenos matemáticos y físicos. Esto mismo, en Morales (2020) menciona que en la obra de Brousseau (1986) a lo anterior lo llama fenómenos didácticos, en el que indica el abuso de esta “analogía”, el cual provoca en el alumno que no pueda darles solución a los problemas, generando esquemas intelectuales, aunque sigan siendo imitadores del docente; así que tal motivo hace que no haya aprendizaje que les dé sentido.

Simplemente por ser imitadores y memorizar cómo resolver problemas, el resultado es que los alumnos los olvidan a corto plazo. De igual forma Ruiz, Mora y Álvarez (2011) señalan que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física de tal manera, el alumno no debe ser un reproductor de la explicación del docente, sino más bien matizar los conocimientos adquiridos a través del estudio de esta materia con su cultura general, donde se integra lo cognitivo y lo axiológico; para lograr este objetivo es necesario aplicar dinámicas diferentes a las que se utilizan a diario.

De igual manera, en Morales (2020) indica que los docentes no cuentan con los conocimientos necesarios para diseñar situaciones didácticas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes porque la mayoría no tiene el perfil adecuado, ya que son egresados de diversas titulaciones como ingenieros de diferentes áreas y licenciados en física y matemáticas que no tienen formación pedagógica. Además, no les importa enseñar la utilidad de la física y las matemáticas en diferentes contextos como herramienta para entender el entorno resolviendo problemas concretos y no solo abstractos.

Por ello, Matthews (2017) en su obra "La enseñanza de la ciencia: Un enfoque desde la historia y la filosofía de la ciencia" nos informa sobre los útiles aportes a los aspectos teóricos, curriculares y pedagógicos de la enseñanza. de la ciencia y, por lo tanto, que aprender algo de historia y filosofía de la ciencia debería ser una parte natural de los programas de formación de profesores de ciencias. De la misma manera, en Matthews (2017) nos señala que el constructivismo ha sido la influencia teórica para la enseñanza contemporánea de las matemáticas y las ciencias, y en su forma moderna posmodernista y deconstruccionista ha influido significativamente en la enseñanza de las matemáticas, las letras, el arte, los estudios sociales y la religión, así también, que la ciencia y las matemáticas son una actividad humana creativa histórica y culturalmente condicionada, y que sus afirmaciones de conocimiento no son absolutas.

Por eso estamos convencidos de lo anterior, que la enseñanza de los "objetos culturales" debe ser donde el alumno mida, calcule, explore, formule, juegue, investigue, construya sus conjeturas junto a sus compañeros de estos "objetos culturales".

Asimismo, justificamos que la física y las matemáticas tienen una gran aplicación en todas las ciencias (sociales y naturales) y en la vida cotidiana, por lo que es fundamental para todos los regímenes educativos. Por tanto, en una alfabetización científica, adquirir sólo conocimientos científicos y algunas habilidades procedimentales es un tanto incipiente, pero también se deben desarrollar actitudes de interés y responsabilidad en situaciones relacionadas con la ciencia. Del mismo modo, se exige comprender qué es la ciencia, cómo se construye y evoluciona, cómo prospera en el progreso sociocultural (y viceversa), e influye, es decir, una razón básica de lo que se llama la naturaleza de la ciencia. por lo que debería formar parte de la gran mayoría de los currículos escolares oficiales de ciencia.

3.3 De las Tecnologías de la Información de la Comunicación a las Tecnologías del Aprendizaje del Conocimiento

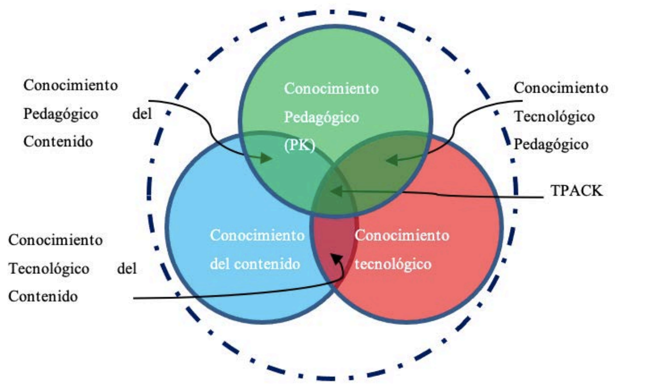
En Morales (2020) nos comparte que la enseñanza de la física y matemática está cambiando con la introducción de las tecnologías. Este paradigma de la enseñanza de la física y matemática permite a los estudiantes diseñar, construir modelos y, más aún, hacer un uso adecuado a través de actividades que promuevan su aprendizaje con el apoyo de las tecnologías, en (Ruiz, Mora y Álvarez, 2011; Ruiz, 2015; Talero, 2011 citado en Morales, 2020) señalan que es de vital importancia que en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes desarrollen la capacidad de resolver problemas que expresen la realidad cotidiana, para dar sentido a lo aprendido en correspondencia con las condiciones actuales, de la sociedad y desarrollo tecnológico, para aprender a adaptarse a situaciones nuevas y sentirse responsables con la transformación de la realidad. En el trabajo de Morales (2020) propone en su investigación realizar trabajos de investigación donde se aborde las posibilidades de simulación interactiva que ofrezcan las tecnologías ya sea por computadoras o en línea de tal forma que abran un amplio abanico de posibilidades didácticas en el campo de la física y la matemática.

Entonces, uno de los propósitos de nuestro trabajo de investigación inmerso en este capítulo, es trabajar precisamente en un ambiente virtual como es la plataforma de PhET. Aunque existen diversas plataformas virtuales desarrolladas para el aprendizaje de la física y matemática como: a) Algodoo, simulador en donde puede estudiarse diversos fenómenos de campos muy diversos como la cinemática, la dinámica, la óptica, los fluidos o la teoría cinética de los gases debido a la utilización de dibujos como el juego *Angry Birds*, además el programa es capaz de realizar simulaciones de la misma forma en las que se estudian en un laboratorio convencional, b) Orbit Explorer, c) Applet (o Physlet), d) Realidad aumentada, e) Laboratorios Remotos (LR) (Ruiz, 2015; Arguedas y Gómez, 2016 citado en Morales, 2020). Por tanto, en Morales (2020) se menciona que estas TIC forman una necesidad de alfabetización digital, el cual de cierta forma un tanto inconsciente nos ha llevado a una nueva situación, y por tanto a una nueva cuestión que afecta de lleno al ámbito educativo, hoy día al mejorar estas TIC, nos vemos obligados hablar sobre las Tecnologías del Aprendizaje del Conocimiento (TAC).

Creemos que desde esta visión tecnológica y de las teorías del aprendizaje constructivista se encuentra una metodología adecuada para nuestra propuesta de investigación, enfocada al área de la tecnología educativa, la cual se propone desde un marco a partir de la formulación de (Shulman, 1986; Mishra & Koehler, 2006 citado en Morales, 2020) proponen defender la relación entre el conocimiento disciplinar y pedagógico, que sólo sería (PACK), en “conocimientos pedagógicos carpa de conocimiento’’ y que además de esta formulación se incorpora al nuevo fenómeno donde los profesores integran la tecnología en su pedagogía, he intenta capturar algunas de las cualidades esenciales del maestro, conocimiento requerido para la integración de la tecnología en la enseñanza, al abordar la naturaleza compleja, multifacética y situada de este conocimiento. A lo anterior (Mishra y Koehler, 2006 citado en Morales, 2020) llamaron Conocimiento Tecnológico del Contenido Pedagógico (TPACK), ver figura 1.

Figura 1. Relación carga académica del estudiantado y tiempo de dedicación a las actividades

Modelo del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido.



Fuente: Morales (2020)..

Continuando con lo anterior, señalamos que en (Lizana, 2012 citado en Morales, 2020) el autor indica sobre la relación de los tres conocimientos básicos el pedagógico, tecnológico y del contenido del TPACK que además de esta relación, se tienen otros tres conocimientos que se generan, como el pedagógico del contenido, tecnológico del contenido y tecnológico pedagógico donde se genera el conocimiento con experiencia del docente en materia TAC, el TPACK.

Por lo que nuestro marco teórico del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), en nuestro trabajo de investigación y de este capítulo la definiremos como el conocimiento con experiencia, al saber utilizar las Tecnologías del Aprendizaje del Conocimiento para apoyar las estrategias y métodos pedagógicos en la enseñanza de las leyes de Kirchhoff de un circuito eléctrico resistivo (Morales, 2020). A continuación, se explica cada uno de estos tres conocimientos del modelo TPACK:

a) Conocimiento Tecnológico (TK): Señala sobre las habilidades para usar tecnologías tanto a nivel estándar como particulares. Además de la capacidad de aprender y adaptarse a las nuevas tecnologías.

b) Conocimiento Pedagógico (PK): Este consiste en conocimientos acerca de los procesos, prácticas, métodos de enseñanza-aprendizaje, valores y objetivos en general con fines educativos. También se concibe como la construcción de conocimiento en los estudiantes, adquirir conocimientos y desarrollar hábitos de la mente y disposición positiva hacia el aprendizaje. Habilidades y conocimientos relacionados con la formación general, como pueden ser la rutina de clase, la planificación, creación de grupos de trabajo, e incluso técnicas de disciplina.

c) Conocimiento del Contenido (CK): esta etapa se conoce como conocimiento sobre lo que se enseña o aprende, en nuestro trabajo de investigación es sobre las leyes de Kirchhoff. Donde la intención es conocer y comprender las teorías, conceptos y procedimientos de la física.

Como se observa en la figura 1 estos conocimientos al relacionarse entre ellos se tienen otros tres conocimientos, según Mishra y Koehler (2006, citado en Morales y Mora, 2020) son:

De la unión del conocimiento pedagógico con el tecnológico surge el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK), el cual establece saber utilizar las TAC en un tema como el de nuestra investigación de las leyes de Kirchhoff. Señala el cómo implementar planes cambiando el ritmo de la clase, la utilización de tutoriales, materiales realizados por el propio profesor, propone conocer la existencia de funciones, componentes de diversas tecnologías para utilizarlas en la enseñanza y saber el cambio que se daría en el aula si se introdujera estas tecnologías.

La otra unión es la del conocimiento tecnológico al del contenido por lo que se tiene el Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK), relaciona todos los conocimientos tecnológicos que la persona tiene, para que pueda hacer un buen uso de ello. Como es en nuestra investigación el de utilizar en el aula, el uso de bases de datos a desarrollar o utilizar herramientas TAC, adecuadas al tópico de las leyes de Kirchhoff.

La tercera unión consiste entre el conocimiento pedagógico con el conocimiento del contenido resultando el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), conocimiento similar a la idea del conocimiento pedagógico del contenido que planteaba Shulman (1986, citado en Morales, 2020), en la que señala que se debe de conectar ideas, conexiones, estrategias alternativas a la docencia clásica, transformar y buscar diferentes caminos que lleven al estudiante a alternativas de las concepciones preestablecidas, es decir, transformar al campo eléctrico en si para la docencia, en donde cualquier docente debe tener conocimientos pedagógicos para impartir docencia.

Continuando con lo anterior si relacionamos estos tres conocimientos básicos el pedagógico, tecnológico y del contenido además de los tres conocimientos que se generan de estos como el pedagógico del contenido, tecnológico del contenido y tecnológico pedagógico se extrae el conocimiento con experiencia del docente en materia TAC, el TPACK (Lizana, 2012).

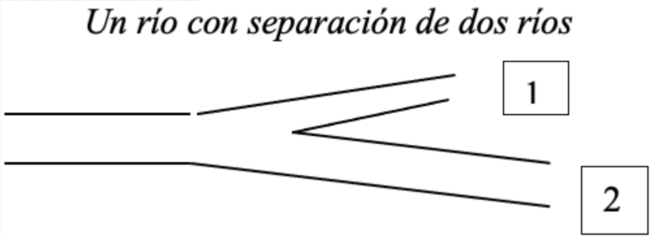
3.4 Las leyes de Kirchhoff en la escuela

En nuestro trabajo de investigación, encontramos que uno de estos obstáculos que tienen los estudiantes de adquirir el conocimiento del análisis de los circuitos eléctricos resistivos, que es parte de la asignatura de electromagnetismo y óptica, asignatura que se encuentra en el cuarto semestre de ingeniería, donde el estudiante no encuentra significado y relación de la simbología eléctrica y las matemáticas con el contexto real. Provocando un abuso de la abstracción carente de significados. Esto nos permite proponer una serie de actividades dentro del marco de medir, calcular y predecir a modo que el estudiante pueda adquirir significados del “objeto cultural”. Para ello se contó con la participación de Carlos y Zurani, estudiantes del Instituto Tecnológico Nacional de México (TecNM) campus Tuxtla Gutiérrez

Podemos definir como circuito eléctrico resistivo a la combinación de varias resistencias en serie, paralelo o mixto. Conectadas a un suministro de energía o pila. La resistencia se conoce como el componente eléctrico que se opone al paso de la corriente.

A manera de introducción a los circuitos eléctricos resistivos con los estudiantes, se les planteó la actividad 1. Como se muestra en la figura 2 representa un río que se separa en dos ríos. En donde se espera que los estudiantes señalen que en la sección dos tendrá un mayor flujo que en la sección uno debido a la reducción del caudal, por ende, esta última sección debe presentar mayor resistencia al flujo de agua.

Figura 2. Un río con separación de dos ríos



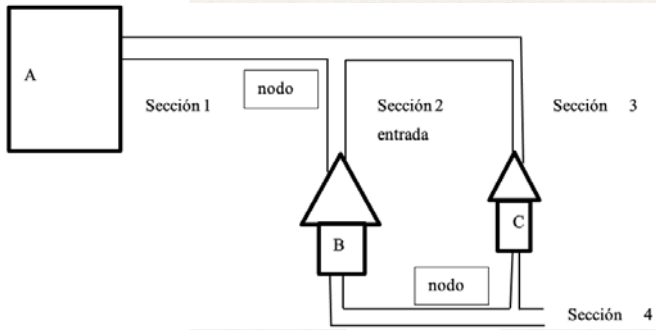
Responda al siguiente cuestionamiento:

¿Cómo es el flujo del río en la sección 2 respecto a la sección 1? Argumente su respuesta.

En otra actividad dos, a los participantes se les presenta la siguiente figura 3, en donde el tanque de agua A alimenta a dos depósitos B y C. En esta actividad, se pretende que los estudiantes comiencen a comprender lo que es flujo (en electricidad se le conoce como corriente y además las leyes de Kirchhoff) donde deben establecer que la suma de los flujos de la sección tres más la sección dos es igual al flujo de la sección 4, comprendiendo lo que establecen las leyes de Kirchoff "la suma de la totalidad de las corrientes que entran en una conexión es equivalente a la corriente que sale en otro conexión", en nuestra actividad análoga consiste que el flujo en el nodo de la sección 1 se divide en las secciones 2 y 3 pero al llegar al nodo de la sección 4, el flujo debe ser el mismo que entró en el nodo de la sección

1. En otro se establece que es una conexión de resistencias en paralelo.

Figura 3. Alimentación de dos depósitos a través de un tanque de agua.



Responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de los depósitos almacena mayor cantidad de agua? Argumente respuesta.

Sin considerar pérdidas de agua al pasar por las salidas de los depósitos, responde a lo siguiente:

b) ¿Cómo es el flujo de agua en la sección 2 respecto a la sección 3?

c) ¿Considera que el flujo de la sección 1 es igual que el flujo de agua de la sección 4? Argumente respuesta.

Proporcione una expresión matemática en relación con las secciones que demuestre la pregunta anterior:

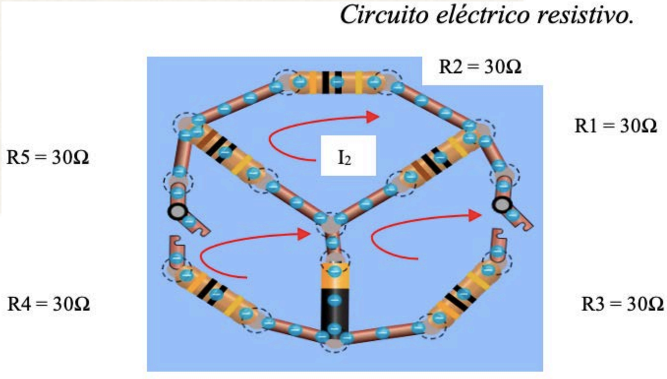
¿Cómo estaría de acuerdo que el contenido del tanque A = contenido del depósito B = contenido del depósito C?

¿Cómo podría establecer la ley de Kirchhoff?

Las actividades anteriores permiten que el participante se familiarice e involucre al tema de los análisis de los circuitos eléctricos resistivos. Pero, esto no basta o se pueda asegurar que el participante adquiera este conocimiento, como hemos mencionado anteriormente como disponemos de las TAC entonces recurrimos al uso de laboratorios virtuales como el de PhET.

La tercera actividad de la investigación es construir el siguiente circuito eléctrico resistivo como es visible en la figura 4.

Figura 4. Circuito eléctrico resistivo.

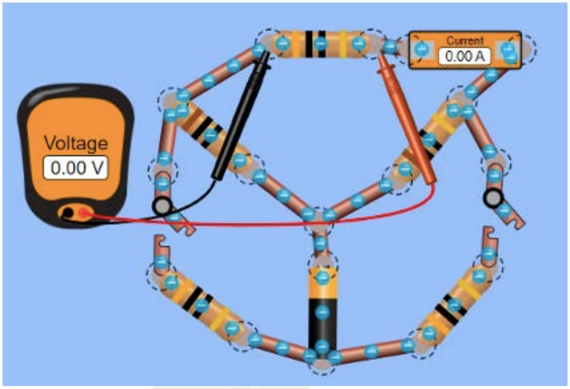


a)Como actividad de predicción, se le solicita al participante haciendo un análisis mental prediga la dirección de la corriente en la resistencia dos (R2), y cuál es el valor de esta al cerrar los interruptores (ver figura 4).

b)Como actividad de medición. Con ayuda de los medidores disponibles calcular la corriente (I) y el voltaje (V) en el resistor dos (R2), de acuerdo con la figura 5.

Figura 5. Circuito eléctrico resistivo de la actividad 3.

Circuito eléctrico resistivo de la actividad 3



c) Observando en la simulación, ¿determine las ecuaciones de las leyes de Kirchhoff?

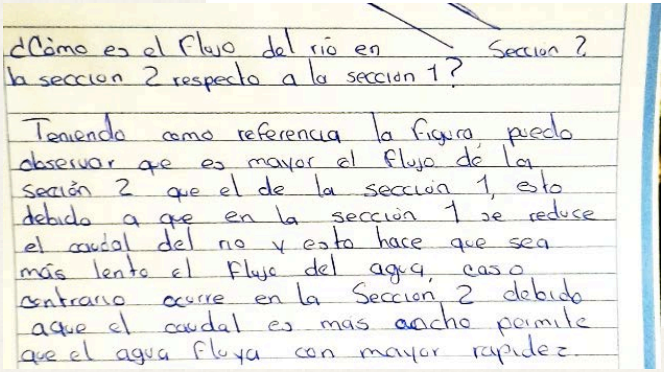
A priori de la actividad tres, en el inciso a) lo que esperamos de los estudiantes es, que ellos puedan predecir la dirección de la corriente en el circuito por simple inspección, y de igual forma realice un análisis del valor de esta corriente.

En tanto que en el inciso b) con ayuda del simulador el estudiante hará mediciones del circuito eléctrico resistivo. Mientras que en el inciso c), el participante esperamos que puedan construir las ecuaciones de malla del circuito.

3.5 Resultados

Los resultados obtenidos de la actividad uno de la figura 2, los participantes no tuvieron problemas de responder la actividad por lo que comprendieron que al estar más estrechos o menos estrechos las secciones 1 y 2 el flujo del río sería mayor en una sección que en la otra. Por lo que los participantes comienzan de forma análoga a entender lo que es una resistencia eléctrica como es acotado en la figura 6.

Figura 6. Los participantes argumentan sobre que sección del río tiene mayor caudal.

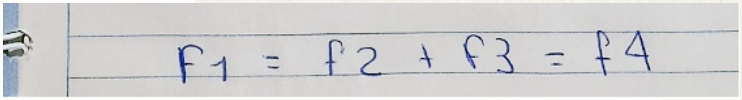

¿Cómo es el flujo del río en la seccion 2 respecto a la seccion 1?   Sección 2

Teniendo como referencia la figura, puedo observar que es mayor el flujo de la sección 2 que el de la sección 1, esto debido a que en la sección 1 se reduce el caudal del rio y esto hace que sea más lento el flujo del agua, caso contrario ocurre en la Seccion 2 debido a que el caudal es más ancho permite que el agua fluya con mayor rapidez.

En la actividad dos, los participantes logran identificar que depósito logra contener mayor cantidad de agua, esta analogía la interpretan como si el depósito tiene una menor resistencia a la corriente y por ende representaría un mayor voltaje enfocando la idea de circuitos eléctricos. De lo anterior, también se demuestra que los participantes entienden que al ver menos resistencia al paso del flujo de agua ellos entienden que habrá una mayor cantidad de este, en el sentido eléctrico tendrán mayor cantidad de corriente.

De igual forma logran entender que la división de los dos flujos de la sección 2 y 3 es producto de la sección 1, es así que, al dividirse esta en dos flujos al llegar a la sección 4 estas se sumarían nuevamente con un flujo similar a la sección uno por lo que establecieron que flujo de sección 1 = flujo de sección 2 más flujo de sección 3 igual al flujo de la sección 4, ver figura 7.

Figura 7. Los participantes proponen su construcción algebraica.



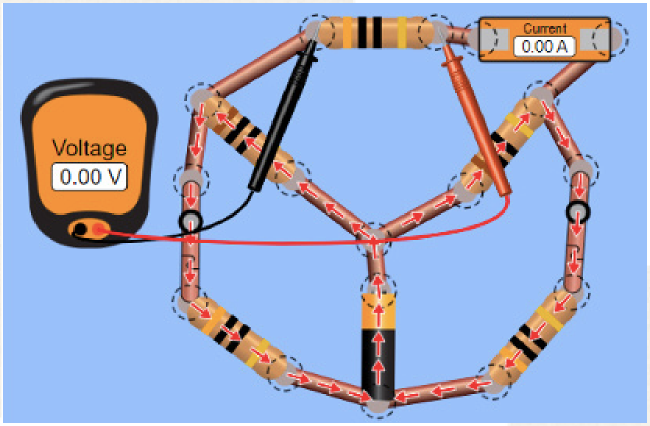
En el cuestionamiento ¿cómo estaría de acuerdo que el contenido del tanque A = contenido del depósito B = contenido del depósito C? el participante logra comprender que, al estar conectados de forma paralela, a pesar de que el depósito B presenta menor resistencia entonces, en el sentido eléctrico comprenden que el voltaje de una rama o sección es igual al voltaje en la otra sección.

La ley de Kirchhoff que establecen fue (Resistencia en B) por el (flujo en B) = (Resistencia en C) por (el flujo en C), efectuando una analogía con respecto a los circuitos eléctricos vemos que los participantes pueden realizar esas comparaciones.

Para la actividad tres, lo que responden para la actividad del inciso a) fue que los dos participantes no logro predecir la dirección de la corriente ni el valor de esta. Este resultado se debe a que los participantes se les dificulta de forma simbólica establecer la dirección de la corriente, creando en ellos una incertidumbre. Pero en cuanto comienzan a funcionar al simulador, se dan cuenta de lo que están trabajando y provoca un interés sobre lo que están manipulando virtualmente.

En la actividad del inciso b) los alumnos pueden darse cuenta con mayor facilidad el funcionamiento del circuito, es decir, aprenden a conectar los instrumentos de medición y provoca en ellos de medir no solo a lo que se les solicita, sino que a todos los componentes que forman parte del circuito eléctrico resistivo. De igual forma pueden ver la dirección de la corriente que a simple vista o análisis suele ser complicado para los participantes, véase la presente figura.

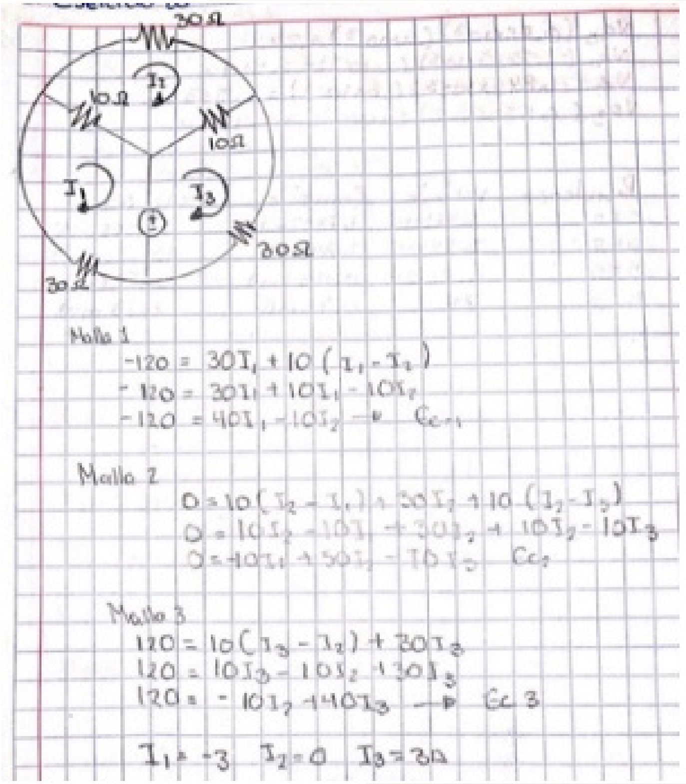
Figura 8. Circuito eléctrico resistivo elaborado por los participantes



En cuanto a la actividad c) los participantes, no les fue complicado deducir las expresiones matemáticas de las leyes de Kirchhoff, debido a que el simulador muestra la dirección de la corriente y con ello pueden construir estas ecuaciones, incluso el medidor de voltaje les permite determinar el signo del voltaje en cada resistor, a continuación, se muestra lo que realiza Carlos, que es uno de los participantes.

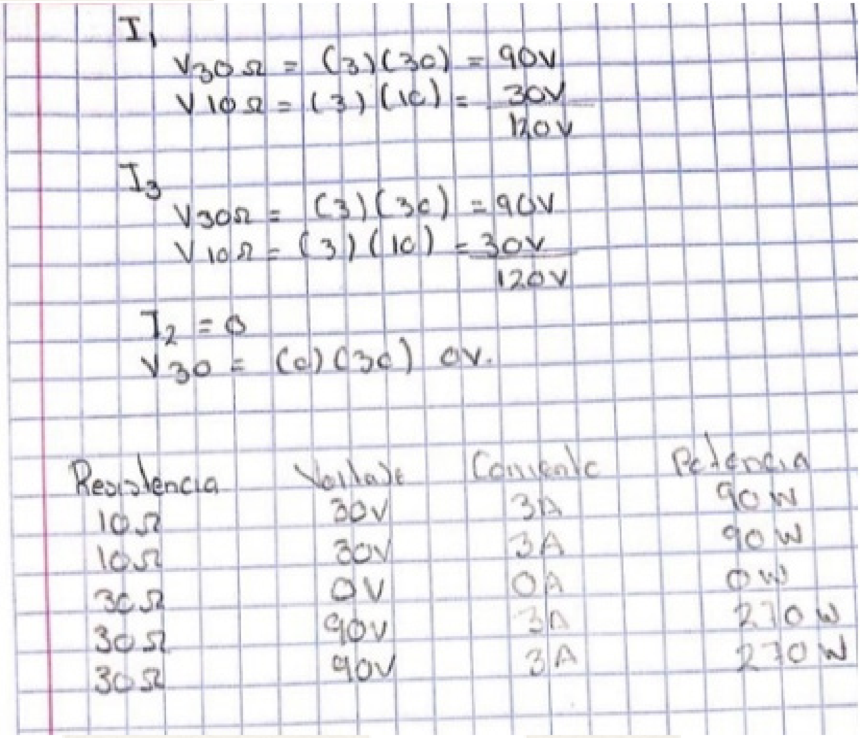
En los análisis algebraicos que realiza Carlos, no se le dificulta hacer las ecuaciones algebraicas porque los construye a partir de lo que ve en el simulador, es decir, puede seguir la trayectoria real de la corriente, figura 9.

Figura 9. Optención de las ecuaciones del análisis del circuito resistivo



Al resolver sus ecuaciones algebraicas puede determinar el valor de la corriente I2=0, en tanto su voltaje es de 0 volts. Con lo que puede comprobar con el simulador, ver figura 10.

Figura 10. Muestran los calculos obtenidos I2 = 0 y V de la reistencia 0 volts, asi como los calculos en los demás elementos resistivos



I_1

$V_{30\Omega} = (3)(30) = 90V$

$V_{10\Omega} = (3)(10) = 30V$

$120V$

I_3

$V_{30\Omega} = (3)(30) = 90V$

$V_{10\Omega} = (3)(10) = 30V$

$120V$

$I_2 = 0$

$V_{30} = (0)(30)\ 0V.$

Resistencia	Voltaje	Corriente	Potencia
10Ω	30V	3A	90 W
10Ω	30V	3A	90 W
30Ω	0V	0A	0 W
30Ω	90V	3A	270 W
30Ω	90V	3A	270 W

A manera de conclusión podemos aseverar que, dentro de nuestras estrategias pedagógicas, partimos de conocimientos de siglos anteriores intentando enseñarlos a los estudiantes de estos siglos como productos terminados. Lo que provoca que estos conocimientos sean carentes de significado, abstractos. Donde el rol del estudiante suele ser pasivo en donde ve y escucha, solo es un espectador y el profesor se torna un comunicador.

Por ello, nuestra actividad nos enfocamos a que los alumnos tengan un rol importante en su aprendizaje. Es decir, que ellos sean más activos, donde jueguen, discutan, manipulen, dar continuidad con su curiosidad, su rol de experimentadores, su habilidad y destreza social. Caso contrario lo que provoca la “escuela normal”, lo que resulta en el estudiante una apatía hacia su aprendizaje, provocando una emoción desfavorable.

Por lo que estamos de acuerdo que el diseñar actividades que jueguen un rol importante en despertar las curiosidades de los estudiantes sin dejar a un lado las emociones. Es así que la actividad que se presenta intenta abordar al análisis de los circuitos eléctricos resistivos en un enfoque de aprendizaje activo, y para ello aprovechar las TAC, en nuestro caso, la TAC utilizada determina de forma cualitativa que favoreció el aprendizaje de los alumnos de forma interactiva, debido a que los dos participantes discutieron, intercambiaron ideas, ellos tomaron ese rol activo de su aprendizaje. Y cabe destacar que este tipo de tecnologías permite a que el estudiante pueda hacer y deshacer los diseños de los circuitos eléctricos resistivos, incluso quemarlos, solo con dar las instrucciones de borrado, corrigen errores. Por lo que en cuestión económica abarata los procesos de construcción, lo contrario a si lo hicieran de forma real. Cuando un diseño resulta correcto, entonces este podrá diseñarse de forma real. Por lo tanto, el soporte de la tecnología permite recrear experimentos de manera virtual que puede ahorrar costos, pero que se puede verificar en la realidad (Morales, 2020). El cual tendrá el mismo funcionamiento que el simulado. Por lo que la adquisición del aprendizaje en los alumnos es mucho mejor.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE UN SISTEMA DE CÁLCULO VARIACIONAL: MEDIACIÓN SOCIAL CON CONTEXTO DE PREDICCIÓN EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Francisco Agustín Zúñiga Coronel

Introducción

En este capítulo presentamos un análisis histórico-epistemológico del Cálculo y la génesis de la Serie de Taylor.

Enseguida se establece un análisis histórico del contexto de circuitos eléctricos. Con base en lo anterior se plantea un diseño de actividades y su mediación social, así como elementos para una Transposición Didáctica de la Serie de Taylor en tanto herramienta de predicción para la ingeniería.

4.1. Desarrollo histórico-epistemológico del Cálculo

El enfoque histórico se basa en acontecimientos (hechos) y el epistemológico sobre las circunstancias permiten la construcción de conocimiento matemático. El desarrollo histórico del Cálculo se debe a diversas aportaciones de matemáticos, físicos, filósofos, científicos e investigadores. Por tanto, "los modos de transmisión y construcción del saber matemático han sido diferentes a lo largo de la historia […]" (Cantoral, 1995, p. 67). El desarrollo del Cálculo se encuentra relacionado con el movimiento de los cuerpos, la variación, la recta tangente, el cálculo de áreas, los infinitesimales, la predicción, las funciones, el límite, entre otros. Como señala Cantoral (2016):

> […] el surgimiento del Cálculo no estuvo asociado exclusivamente al estudio de los procesos infinitos o al arribo del concepto de límite a la matemática, ni mucho menos al desarrollo de la noción de infinitesimal como entidad para el uso y la fundamentación, o la aparición del concepto de función, entre otros más, sino más bien y en definitiva, a la existencia de campos de prácticas que guiaban y estructuraban al proceso de construcción del pensamiento matemático […]" (p. 112).

El concepto de derivada se ha estudiado a través de los años y se ha consolidado como uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas. Según Grabiner (1983) primero se dio uso, luego se descubrió, exploró y desarrolló, y posteriormente se definió. En el contexto histórico varios personajes se dedicaron al estudio de la derivada, algunos con ideas intuitivas y otros desde la formalización. La derivada es un concepto que tiene diversas aplicaciones tales como: optimización (máximos y mínimos), análisis de funciones crecientes y decrecientes, concavidad hacia arriba o hacia abajo, puntos de inflexión y razones de cambio. Estas aplicaciones pueden resolver gran variedad de problemas cotidianos, en la ciencia o en la ingeniería.

Este desarrollo se dio en varias regiones del mundo. En la región de Mesopotamia (ver figura 1) se realizaron diversas observaciones astronómicas centradas en los movimientos de los planetas. En el año 2 000 a.C., según Mason (2012), Venus volvía a la misma posición cinco veces en ocho años, lo que permitió un registro sistemático de dicho movimiento. Los mesopotámicos calcularon valores medios (promedios) de fenómenos periódicos de las revoluciones planetarias, así como predicciones de acontecimientos astronómicos (eclipses). Ellos analizaron datos numéricos y no emplearon métodos geométricos.

Figura 1. Mapa de Mesopotamia

Fuente: https://www.pinterest.com.mx/pin/848506386016418881/

En Grecia varios personajes dieron sus aportaciones, tal es el caso del matemático griego

Tales de Mileto (624 - 548 a.C.), realizó estudios de astronomía a partir de observaciones y con el uso de la geometría. En el año 585 a.C., hizo la predicción de un eclipse de sol (Collette, 1986). La predicción, desde esa época, era de gran relevancia para comprender la naturaleza.

Por su parte, Demócrito (460 - 370 a.C.), efectuó estudios sobre los átomos, donde establecía que:

> Todos los fenómenos deben ser explicados [...] en términos de átomos infinitamente pequeños y de distintos tamaños, que se mueven en el espacio vacío. La creación del universo es el resultado de una ordenación y de una coagulación de átomos que poseen un cierto parecido [...] Los problemas matemáticos que interesan a Demócrito presentaban dificultades, en cierta medida, de naturaleza infinitesimal [...] concebía un sólido como una suma de un número infinito de capas planas paralelas unas a otras, infinitamente delgadas e infinitamente próximas. (Collette, 1986, pp. 83–84).

Esta idea de los átomos como objetos infinitamente pequeños está relacionada con la noción de diferencial, es decir, si se asume que cualquier objeto está conformado por estos átomos, cualquier variable (propiedad de un objeto) puede considerarse muy pequeña, lo que permite calcular el cambio puntual en la otra variable.

Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.) realizó observaciones astronómicas, en este sentido Collette (1986) señala que:

> Eudoxo considerado en ocasiones como el padre de la astronomía científica, elaboró, para explicar los movimientos aparentes del sol, la luna y los cinco planetas conocidos en su época, una elegante hipótesis sobre las esferas concéntricas. En esta hipótesis, los movimientos descritos son movimientos circulares uniformes. (p. 98).

Eudoxo empleó el método exhaustivo para calcular áreas que consistía en aproximar el área de un círculo al construir polígonos inscritos o circunscritos. Este método contribuyó al desarrollo del cálculo integral (Collette, 1986). Donde la noción de aproximar polígonos da la idea de lo infinitamente grande (número de lados del polígono).

Arquímedes (287 - 212 a.C.) fue un matemático inventor de máquinas: catapultas, palancas, entre otras. Hizo estudios relacionados con la mecánica, la hidrostática y la astronomía. Arquímedes aplicó el método exhaustivo empleado por Eudoxo (aproximar áreas por medio de polígonos) para el cálculo de áreas y volúmenes. Según Collette (1986):

> Las principales contribuciones de Arquímedes se refieren a la teoría de las palancas, establecida sobre principios de estática, al estudio de los centros de gravedad de figuras planas y sólidos y a su equilibrio físico, al estudio de la hidrostática, por ejemplo, a las propiedades de los líquidos y al equilibrio de los cuerpos en ellos sumergidos, al estudio de la representación de los grandes números, a la aproximación π por un polígono inscrito de noventa y seis lados, al estudio de la espiral aritmética y de las tangentes a esta espiral, a la cuadratura de los segmentos de curvas. (pp. 138–139).

Herón de Alejandría (75 - 150 a.C.) trabajó problemas de medidas y construyó diversos aparatos mecánicos. Sus obras tratan del cálculo de áreas de distintas figuras: cuadrados, rectángulos, triángulos, polígonos regulares, segmentos de esfera, cilindros y segmentos parabólicos; y sobre la medición de volúmenes de figuras sólidas: conos, esferas, sólidos regulares, cilindros, paralelepípedos, pirámides y troncos de pirámides (Collette, 1986). En esta etapa ya se hacía referencia a las medidas de los objetos geométricos y en la construcción de instrumentos de medición. Posteriormente, estos instrumentos contribuirán al desarrollo de las ciencias (química, física, biología, medicina, entre otras).

Los griegos también se enfocaron en resolver problemas relacionados con tangentes y áreas. Tal como señala Grabiner (1983):

> Los griegos, por supuesto, habían sabido cómo encontrar las tangentes a los círculos, a las secciones cónicas y algunas curvas más sofisticadas, como la espiral de Arquímedes […] Los griegos habían definido una tangente como una línea que toca una curva sin cortarla, y generalmente esperaban que tuviera solo un punto en común con la curva […] (p. 196).

En los griegos se identifica el problema de las tangentes. Este problema generó varias discusiones que contribuyeron al desarrollo de la derivada.

El movimiento se puede considerar como una propiedad que tienen todos los cuerpos. Desde la historia de la ciencia e incluso de la humanidad se han realizado múltiples investigaciones sobre el movimiento. Algunos de los principales representantes que lo estudiaron fueron Aristóteles, Ptolomeo, Copérnico, Kepler, los científicos de Merton, Oresme, Galileo y Newton. Estos personajes aportaron algunas ideas fundamentales para la construcción científica del estudio del movimiento.

La visión de Aristóteles (384 - 322 a. C.) sobre el movimiento, según Koyré (1980), es considerada como una teoría basada en datos obtenidos de la intuición (sentido común), los cuales eran sometidos a un proceso sistemático (lógico). Aristóteles propone una teoría razonable sobre el movimiento de cuerpos sin considerar la experimentación para estudiar los fenómenos naturales, sino más bien usaba el razonamiento lógico (silogismo) para analizar las causas del movimiento (Duarte, 2011). Él estudia dos categorías de movimiento: el de cuerpos celestes (supralunar) y el de cuerpos terrestres (sublunar). El cielo es un cuerpo celeste y es considerado como una esfera que gira en círculo. La Tierra lo establece como el centro del universo y su estado es el reposo.

El universo se divide en dos regiones: supralunar y sublunar. En la supralunar los cuerpos tienen forma esférica y el movimiento de todos ellos es perfecto (en el mismo sentido y con velocidad uniforme). En la región sublunar los cuerpos no son perfectos ni sus movimientos uniformes (Biro, 1990). En esta región los objetos terrestres estaban cerca del centro del universo y formados por la mezcla de fuego, el aire, la tierra y el agua. El fuego y el aire con la propiedad de "ligereza" donde su movimiento natural es hacia arriba. La tierra y el agua con la propiedad de "pesadez" donde su movimiento natural es vertical hacia abajo (Duarte, 2011, p. 66). Como señala Hawking (2011):

> Aristóteles creía que la Tierra era estacionaria y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se movían en órbitas circulares alrededor de

> ella. Creía eso porque estaba convencido, por razones místicas, de que la Tierra era el centro del universo y de que el movimiento circular era el más perfecto [...] La Tierra permaneció en el centro, rodeada por ocho esferas que transportaban a la Luna, el Sol, las estrellas y los cinco planetas conocidos en aquel tiempo, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. (pp. 10–11).

Aristóteles identifica dos estados de movimientos: naturales y violentos. Los movimientos naturales son considerados como equilibrios de los cuerpos para poder regresar a su lugar natural. Los movimientos violentos se consideran como desequilibrios debido a fuerzas externas ejercidas sobre los cuerpos. El reposo es un estado de los cuerpos que como señala Koyré (1980):

> No es necesario [...] explicar el reposo, al menos el reposo natural de un cuerpo en su lugar propio; es su naturaleza misma lo que lo explica, como explica, por ejemplo, el reposo de la tierra en el centro del mundo (p. 10).

El movimiento tiene como fin el reposo, es decir, en algún momento el objeto en movimiento se equilibrará (detendrá). “Así, moverse es cambiar, [...] comportarse (o ser) de otro modo” (Koyré, 1980, p. 11). Todo cambio tiene una causa que lo provoca llamada motor. El motor tiene la función de mantener el movimiento, si el motor se suprime el movimiento desaparece. En cambio, en el movimiento violento se requiere de la acción (fuerza) continua de un motor externo en contacto con el móvil.

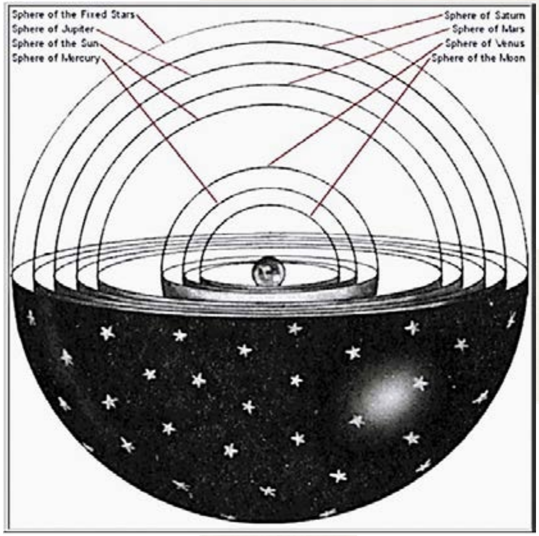
Los cuerpos se dirigen al centro del universo (la Tierra), donde los pesados caen más rápido que los ligeros simplemente porque los empuja su naturaleza (movimiento natural). En caída libre los cuerpos aumentan su movimiento conforme se van acercando al centro. Duarte (2011) señala que, "las teorías del movimiento de Aristóteles se acercan más al sentido común que a la misma noción cuantitativa y experimental que la ciencia actual maneja. Se preocupa más por el porqué del movimiento que por el cómo [...]" (p. 69).

El movimiento es una propiedad que tienen todos los cuerpos para cambiar de posición en algún instante de tiempo. Algunos movimientos pueden ser observados a simple vista, tales como: imágenes en la televisión, flujo de agua, flujo de datos (mensajes de texto) en el celular. Pero, algunos movimientos no pueden ser observados a simple vista, sino que se requiere de instrumentos de observación (microscopios, telescopios, satélites y osciloscopios), tales como: desplazamientos de los planetas y galaxias; electrones, protones y neutrones; señales digitales; bacterias, células y tejidos, entre otros.

Claudio Ptolomeo (85 - 165 a. C.) también se enfocó en el movimiento en el campo de la Astronomía (ver figura 2), que como señala Hawking (2011):

> El modelo de Ptolomeo proporcionaba un sistema razonablemente preciso para predecir las posiciones de los cuerpos celestes ... Pero, para poder predecir dichas posiciones correctamente, Ptolomeo tenía que suponer que la Luna seguía un camino que la situaba en algunos instantes dos veces más cerca de la Tierra que en otros. ¡Y esto significaba que la Luna debería aparecer a veces con tamaño doble del que usualmente tiene! Ptolomeo reconocía esta inconsistencia, a pesar de lo cual su modelo fue amplio, aunque no universalmente aceptado. (p. 11).

Figura 2. Modelo de Ptolomeo



Fuente: Hawking, 2011, p.10

Los científicos de Merton reconocieron que las distancias iguales recorridas en tiempos iguales corresponden a un movimiento uniforme. Y si el mismo incremento de velocidad se da en tiempos iguales corresponde a una aceleración uniforme. Nicolás de Oresme (1323 - 1382), según Hernández (2006), plantea tres tipos de movimientos: movimiento uniformemente uniforme, movimiento uniformemente diforme y movimiento diformemente diforme. Estos movimientos se representan en las siguientes gráficas:

Gráfica A. Movimiento uniformemente uniforme.

Gráfica B. Movimiento uniformemente diforme.

Gráfica C. Movimiento diformemente diforme.

Salinas (2010) establece que:

> Oresme reconoce la necesidad de la representación gráfica de la variación y propone el uso de un recurso geométrico para representar la intensidad de una cualidad de un objeto: la latitud de formas. Su acercamiento consiste en representar el "objeto" que posee la cualidad como una línea horizontal, la longitud, y para cada punto de ella se determina la latitud representada con una línea perpendicular cuyo tamaño representa la intensidad de la cualidad del "objeto". (p. 56).

En el siglo XV se realizaron observaciones en el campo de la astronomía. Nicolás Copérnico (1473 - 1543) propuso un nuevo sistema del mundo al colocar al Sol como el centro del universo (sistema heliocéntrico). Su obra principal fue: *De las revoluciones de los orbes celestes*, publicado en 1543. En ella analiza los movimientos de los cuerpos celestes para predecir sus posiciones futuras. Copérnico establece que los movimientos de dichos cuerpos son circulares y uniformes. Suponía que la Tierra rotaba sobre su propio eje diariamente y se movía en torno al Sol (como los demás planetas) por una órbita anual. El movimiento de la Tierra y los planetas se hacía alrededor del Sol, en la misma dirección y con velocidades que decrecían con la distancia al Sol (el Sol en el centro y las estrellas en la periferia del universo). Las predicciones de las posiciones de los planetas tenían un margen de error considerable. La rotación y el movimiento uniforme eran atributos naturales de la forma perfectamente esférica (Mason, 2012).

Por su parte, Johannes Kepler (1571-1630) modificó la teoría de Copérnico, sugiriendo que los planetas no se movían en círculos, sino en elipses (Hawking, 2011). Kepler explicó los movimientos de los cuerpos celestes por medio de elipses. Analizó tablas de datos sobre los movimientos planetarios donde se reconocían patrones (regularidades) para predecir estados futuros con mayor precisión. Los movimientos de los planetas ya no fueron circulares ni uniformes ya que cada planeta describe una elipse con el Sol en uno de los focos y la línea trazada desde el Sol al planeta genera áreas iguales en tiempos iguales (Mason, 2012).

Galileo Galilei (1564 - 1642) contribuyó al desarrollo de la derivada y se enfocó en estudiar el movimiento de los cuerpos. De acuerdo con Muñoz-Ortega (2010):

> Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget & García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre causas reales que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (medir es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos). (p. 287).

Es así como, "Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente." (Muñoz-Ortega, 2010, p. 287).

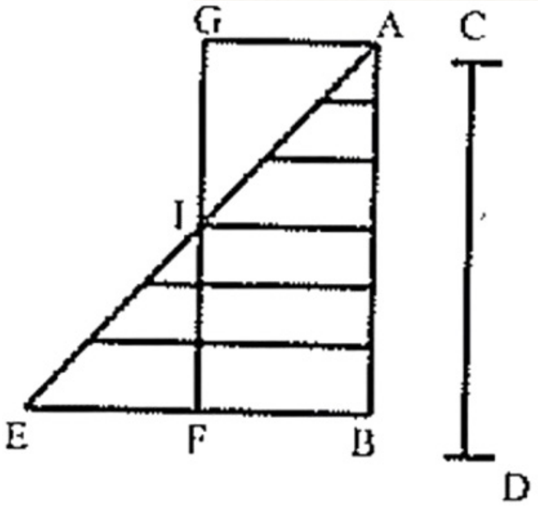
> Únicamente hasta el siglo XVI Galileo, por el razonamiento experimental que utilizó en física, tuvo la oportunidad de no solo ser considerado el fundador del método científico, sino que además puso en entredicho por completo las ideas de la física aristotélica (Duarte, 2011, p. 69).

La caída de los graves (cuerpos) es un movimiento con aceleración constante, Levi (2001) señala que, "[…] Galileo empieza a estudiar el movimiento naturalmente acelerado" (p. 57). Entonces, establece el siguiente teorema (ver figura 3):

> El tiempo en que un móvil partiendo del reposo recorre cierto espacio con movimiento uniformemente acelerado es igual al tiempo que requeriría para recorrer el mismo espacio con movimiento uniforme, pero con velocidad mitad de la que adquiere con dicho movimiento acelerado (Levi, 2001, p. 57).

Esta afirmación, según Cantoral (2001), "[…] establece tácitamente la variación continua de la velocidad. Y en consecuencia la evaluación de lo variable por lo constante: el promedio." (p. 12).

Figura 3. Construcción geométrica del teorema



Fuente: Cantoral (2001, p.12)

> Se pone de manifiesto de todo lo dicho que espacios iguales serán atravesados en tiempos iguales por dos cuerpos, uno de los cuales, partiendo del reposo, se mueve con una aceleración uniforme, mientras que la intensidad de velocidad del otro, que se mueve con velocidad uniforme, es un medio de la intensidad máxima que alcanzaría con movimiento acelerado. (Cantoral, 2001, p. 13).

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue uno de los mejores alumnos de Galileo. Escribió obras de matemáticas, óptica y astronomía. Su obra sobre el método de los indivisibles lo publicó en 1635. "Para Cavalieri una superficie está constituida por un número indefinido de rectas paralelas equidistantes y un sólido por planos paralelos equidistantes" (Collette, 1986). Este método contribuyó al desarrollo de la integral, ya que una figura plana o sólida está compuesta por infinitos objetos con la misma forma (rectas o planos), es decir, la suma de las partes (planos) genera el todo (sólido).

El Cálculo, según Ímaz y Moreno (2014), se considera como la articulación de dos ideas: variación y acumulación. La derivada "tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral tuvo su origen en el problema del cálculo de áreas de superficies con lados curvos" (García y Dolores, 2016, p. 321). Uno de los primeros matemáticos que se enfocaron al estudio de la derivada fue Pierre de Fermat (1601 - 1665) que atacó el problema de las tangentes desde el punto de vista de que se puede determinar la pendiente en solo un punto de la curva, no importando que la corte o toque en otro de sus puntos. Fermat de acuerdo con Cruse y Lehman (1982) se enfocó "en resolver el problema de las tangentes [...] encontró una forma de determinar las ecuaciones de las tangentes a cualquier tipo de curva que se presente" (p. 32).

El problema de determinar máximos y mínimos también lo abordó Fermat, en 1630, sin saber acerca de las derivadas (Grabiner, 1983). Los matemáticos del siglo XVII esperaban que el álgebra simbólica resolviera todos los problemas de máximos y mínimos. Fermat llamó a E infinitamente pequeño, ni desapareció, ni a un límite; no explicó por qué podía dividir primero por E (tratándolo como distinto de cero) y luego descartarlo (tratándolo como cero). Además, tampoco explicó lo que estaba haciendo como un caso especial de un concepto más general, ya sea derivada, tasa de cambio o incluso pendiente de la tangente. De mayor interés que el problema de los extremos en el siglo XVII fue el hallazgo de tangentes. Aquí se pensaba que la tangente era una secante por la cual los dos puntos se acercaban más y más hasta que coincidían. Lo que significaba para una secante "convertirse" en una tangente no fue completamente explicada.

Johann Bernoulli y su alumno Marqués de L´Hôpital, dijeron que un cociente diferencial era una proporción de infinitesimales. El término fluxión puede entenderse intuitivamente como velocidad, pero Newton lo planteada como una cantidad infinitamente pequeña (Grabiner, 1983).

A mediados del siglo XVIII la ecuación diferencial se había convertido en la herramienta matemática más útil en la historia de la física. En esta etapa, la Serie de Taylor era una herramienta desarrollada para la resolución de ecuaciones diferenciales. En 1715, Brook Taylor, consideró diferencias finitas para que en el proceso se hicieran pequeñas, y así llegar a la serie. Esta serie se convirtió en una herramienta poderosa para estudiar funciones y aproximar la solución de ecuaciones diferenciales. La Serie de Taylor estudiaba los cocientes diferenciales de primero, segundo y de cualquier orden. Es así que, Euler (en 1755) estudió máximos y mínimos por medio de la Serie de Taylor (Grabiner, 1983).

Por su parte, Lagrange establece que el cálculo debería reducirse al álgebra (álgebra de series infinitas). En 1797 pensó que había demostrado, que cualquier expresión analítica se podía generar con la serie de poder (Serie de Taylor). Estableció que, el coeficiente del término lineal en la serie era la función derivada dando el origen de nuestro término "derivada" e introdujo la notación $f'(x)$. Consideró a $f''(x)$ como la primera función derivada de $f'(x)$ y a $f'''(x)$ como la función derivada de $f''(x)$. Esto permitió reconocer derivadas sucesivas de una función. Finalmente demostró los coeficientes de los términos de la Serie de Taylor. Lagrange usó series de potencias truncadas en aproximaciones para dar una caracterización útil de la derivada de una función. Entonces, la derivada queda definida por la posición en la Serie de Taylor (Grabiner, 1983).

En 1823 Cauchy dio un tratamiento a la derivada de $f(x)$ con el concepto de límite al considerar el cociente de diferencias $f(x+h)- f(x) \;/ h$ cuando h tiende a cero, enfocándose en lo algebraico. Utilizó su concepto de límite para definir la integral como el límite de sumas. También realizó una prueba del teorema fundamental del Cálculo. Dio la primera prueba de la existencia de una solución a una ecuación diferencial. Después de Cauchy, el Cálculo fue visto como un tema riguroso, con definiciones y con teoremas de acuerdo con sus definiciones (Grabiner, 1983). En el siglo XIX Cauchy resolvió el problema de la tangente con la definición de la derivada mediante el concepto de límite.

En 1850 Karl Weierstrass presentó un tratamiento sistemático y riguroso del Cálculo que se basaba en el análisis de delta-épsilon. El lapso de tiempo desde Fermat hasta Weierstrass fue de más de doscientos años. La pregunta ¿cómo se desarrolló el concepto de derivada? Fue utilizada por Fermat; descubierta por Newton y Leibniz; desarrollada por Taylor, Euler, Maclaurin; nombrada y caracterizada por Lagrange; y solo al final de este largo período lo definieron Cauchy y Weierstrass (Grabiner, 1983). Los conceptos de coeficiente diferencial e integral fueron retomados por matemáticos del siglo XVIII por lo que se llega a la tercera etapa: exploración y desarrollo.

4.2. Génesis histórica de la Serie de Taylor

La dimensión epistemológica tiene la finalidad de responder al cuestionamiento sobre cómo se ha construido el objeto matemático. Se considera que al menos existen tres caminos para la reconstrucción de la Serie de Taylor: el primero es por el binomio de Newton, el segundo por la derivada de Lagrange y el tercero a través de promedios (Muñoz, 2006). En esta investigación se toma en cuenta la reconstrucción a partir del binomio de Newton. La serie de Taylor se desarrolla a partir del último tercio del siglo XVII hasta principios del siglo XX.

La serie de Taylor tiene su génesis (origen) histórica en el binomio de Newton, tal como señala Cantoral (1990): “el antecedente de la serie de Taylor: el binomio de Newton para exponentes fraccionarios”. (p. 139). Por tanto, el binomio de Newton es una de las herramientas de construcción de la Serie de Taylor para una variable.

> El año 1665, Isaac Newton reflexionó sobre la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente, o fluentes, como él las llamó. Entre tales magnitudes se tienen a longitudes, áreas, volúmenes, temperaturas, velocidad y fuerzas, entre otras. Desde entonces él denominó “mi método” a la asociación del manejo de las series infinitas con el estudio de las velocidades de cambio, de las que, a su vez, se servía para determinar la fluente, construyendo así lo que a la postre se llamaría Teorema Fundamental del Cálculo. (Cantoral, 1990, p. 142)

El Teorema Fundamental del Cálculo asume que la integral (área bajo la curva) y la derivada (razón de cambio) son procesos inversos. Estos procesos fueron reconocidos por Newton y Leibniz. Por su parte, Newton lo caracteriza con base al teorema del binomio como modelo de aproximación. A partir del uso funcional de la Serie de Taylor resulta el Teorema Fundamental del Cálculo de la siguiente manera (Ríos, 2020, p. 136):

$$f\,(x+h) = f\,(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,\frac{h^2}{2!} + \quad \ldots$$

Si consideramos h=dx, se tiene

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,dx + f''(x)\frac{dx^2}{2!} + f''(x)\frac{dx^3}{3!} + \cdots$$

$$f(x+h) = f(x) + df(x) + \frac{1}{2!}d^2f(x) + \frac{1}{3!}d^3f(x) + \cdots$$

$$f(x+h) - f(x) = df(x) + df(x+dx) + df(x+2dx) + df(x+3dx) + \cdots$$

$$f(x+h) - f(x) = \int_{x}^{x+dx} df(x)$$

Y de manera general

$$\int_{a}^{a+h} df(x) = f(a+h) - f(a)$$

En el siglo XVII las curvas representaban la trayectoria de una partícula en movimiento. De esta idea, Martínez (2009) señala que:

> Newton visualizó la tangente a una curva como la dirección en la que la partícula se mueve en un instante concreto, asociando la tangente con el vector velocidad de la partícula. El método de encontrar tangentes a través del vector velocidad lo denominó "método cinemático". (pp. 8–9).

La idea de derivada fue motivada principalmente por la física, donde Newton inventó tanto el cálculo como una gran parte de la física del movimiento.

Según Ímaz y Moreno (2014) “fue más allá en el estudio del movimiento; hizo posible una síntesis de las leyes encontradas por Galileo y las leyes que regían el movimiento de los planetas” (p. 15). Newton matematizaba con un programa de investigación tipo geométrico - temporal (Cantoral, 2016).

Newton y Leibniz inventaron el Cálculo. Retomaron los métodos para encontrar tangentes, extremos y áreas para los conceptos de derivadas e integrales. Ellos dieron un argumento para probar el Teorema Fundamental del Cálculo. Newton llamó a la “derivada” fluxión, una tasa de flujo o cambio; en su caso Leibniz vio a la derivada como una proporción de diferencias infinitesimales y la llamó cociente diferencial (Grabiner, 1983).

> La intención de Newton al introducir el uso de las series, consistía en operar más o menos de la misma manera a los polinomios que a las expresiones algebraicas … la manera de expresar y operar relaciones algebraicas complicadas reescribiéndolas como series infinitas en términos más simples. (Cantoral, 1990, pp. 142–143).

Bernal (1979) señala que, “el instrumento del que se sirvió Newton fue el cálculo infinitesimal, o como lo denominó él, método de las fluxiones (el flujo constante de una función continua)” (p. 461). El método de las fluxiones (relación entre variables y sus movimientos) permitió resolver problemas de la física (astronómicos, cinemáticos, mecánicos, ópticos e hidrodinámicos), ya que se puede calcular la posición de un objeto en cualquier instante al conocer su velocidad. Newton proporcionó un sistema de cálculo para predecir, con precisión, las posiciones de la Luna y de los planetas (aportaciones a la Astronomía). En sus cálculos, Newton podía pasar de los cambios de las magnitudes a las magnitudes mismas, y viceversa; por lo que estableció la concepción dinámica del universo, Newton estaba más interesado por el estudio del mundo físico (Ímaz y Moreno, 2014). Como señalan Ríos y Cantoral (2019):

> Los procesos de aproximación y acumulación fueron articulados por Isaac Barrow, en 1669, mediante la tangente a una curva y la razón de cambio que permitiera la vinculación del Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. Sin embargo, más allá de una aproximación geométrica, se trata de una aproximación variacional, puesto que una función no puede ser vista sólo como una curva, sino como un conjunto de variaciones articuladas mediante una regla, y por ello [...] el Teorema de Taylor [...] es una herramienta del Análisis Matemático, que permite visibilizar el carácter variacional. (p. 138)

Leibniz consideró a una curva como un polígono que tiene una infinidad de lados “infinitamente” pequeños. Si A es una cantidad finita y α es un infinitesimal, entonces, A+α puede sustituirse por A en los cálculos. Los infinitesimales de orden superior dx^2,dx^3, etc., se consideran infinitamente pequeños comparados con dx (Ímaz y Moreno, 2014).

> Durante 1715, Taylor publicó su Methodus Incrementorum Directa et Inversa, el cual contiene la primera publicación del desarrollo en serie, conocida hoy como serie de Taylor y, que, a juzgar por el escrito original, se presenta con el fin de estimar el valor de una ordenada a partir del conocimiento de otra que se encuentre ubicada en sus proximidades (Cantoral y Farfán, 2004, p. 110).

El método de los incrementos describe el comportamiento de una cantidad de variación continua. Newton construye una herramienta de naturaleza predictiva retomada por Taylor para describir el comportamiento de una cantidad de variación continua mediante el análisis de sus incrementos, expresada en funciones analíticas (Ríos, 2020).

> Desde 1665 Newton desarrolló su acercamiento sobre fluxiones (velocidades de cambio) de magnitudes variables. Tales magnitudes son: longitudes de curvas, áreas de superficies, temperaturas o velocidades. Desde entonces denominó “mi método” al estudio de las velocidades de cambio que permitan determinar la fluente (lo que fluye). De este modo hizo del hoy llamado teorema fundamental del cálculo una herramienta utilizable […] En 1671 publicó el artículo *Methodus fluxionum et serierun infinitorum* que establece, en analogía con lo realizado por Stevin a principios del siglo XVII, referente a la teoría de los números decimales, la forma de expresar y operar relaciones algebraicas complicadas reescribiéndolas como series infinitas de términos más simples. Sostenía que así como en la aritmética los quebrados y las raíces se expresan en decimales y se trabajan como si fuesen enteros, en el álgebra se pueden expresar los cocientes y potencias como series infinitas, operándose como si fuesen polinomios. (Cantoral y Farfán, 2004, p. 79).

Leibniz (1646-1716) estableció su nuevo cálculo entre 1673 y 1676, inspirándose en sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números. Cantoral y Farfán (2004) señalan que, “cantidades variables son aquellas que crecen o decrecen continuamente; constantes o cantidades fijas son aquellas que continúan siendo la misma cuando las demás varían” (p. 96).

En 1696 L´Hôpital publicó el primer libro de Cálculo diferencial y se comienza la difusión del saber. Surge la idea de diferencial que según Cantoral (1995):

> Las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable; en tanto que para L´Hôpital, las variables no recorren una sucesión de valores infinitamente próximos, sino que crecen y decrecen en forma continua de manera que el diferencial (o diferencia como él les llamó) sea la parte infinitamente pequeña en que aumentan o disminuyen esas variables. (p. 65)

Uno de los antecedentes, según Cantoral (1995), para la construcción de la serie de Taylor (para funciones algebraicas) es el binomio de Newton (herramienta de construcción) con exponentes racionales o funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales (análisis infinitesimal). Pero Newton no fue el único que desarrolló el Cálculo, sino como plantea Hernández (2006):

> En la historia se les atribuye a dos personajes de ciencia, como inventores del Cálculo, Newton y Leibniz, pero no sólo ellos iniciaron y dieron fin sino que hubo científicos que construyeron andamiajes antes y después para que las ideas emergieran en la construcción del Cálculo, aunque con diferentes concepciones respectivamente. (p. 60).

A partir de 1665 Newton desarrolló su enfoque sobre fluxiones (velocidades de cambio) de magnitudes variables. Magnitudes que fluyen continuamente: longitudes de curvas, áreas de superficies, temperaturas o velocidades (Cantoral, 1995). En 1671 Newton expresa y opera relaciones algebraicas complicadas recibiéndolas como series infinitas de términos más simples (polinomios). En 1676 Newton establece la siguiente igualdad general:

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots +$$

Donde:

$$A = P^{m/n}\ ,\ B = \frac{m}{n}AQ\ ,\ C = \frac{m-n}{2n}BQ\ ,\ D = \frac{m-2n}{3n}CQ\ ,\ E = \frac{m-3n}{4n}DQ\ \ldots$$

> De la igualdad binomial se desprende inmediatamente que el miembro derecho de la igualdad será una serie infinita sólo cuando el número *m/n* no sea un entero positivo o cero […] Del lado izquierdo de la igualdad se encuentra el objeto límite (¡expresado en un número finito de términos!) y del lado derecho se encuentra el objeto que tiende a alcanzar al objeto límite (¡expresado en una serie infinita!). Para los griegos esta situación hubiera sido una aberración: algo finito = algo infinito, lo cual muestra con extrema claridad el cambio de actitud de esta época respecto de la antigüedad clásica en relación con los procesos infinitos. (Cantoral y Farfán, 2004, pp. 80–81).

Muñoz (2010) establece que:

> El marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos fue: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento. (pp. 287–288).

En las ideas de Newton se presenta la noción de *Prædiciere* como la acción y efecto de predecir el estado vecino a la luz de los datos que nos provee el conocimiento del estado de facto (estado inicial) con el reconocimiento de patrones de regularidad que permiten reconocer al todo solo con mirar la parte (Cantoral, 1990).

> Así, el objeto fue calcular la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las causas reales de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren en cualquier otro instante. (Muñoz-Ortega, 2010, p. 288).

El *Prædiciere* como señala Cantoral (2019):

> Consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es el acto de predecir sino lo que orienta al querer predecir. Por tanto, la variación, como aquel elemento necesario para la predicción, emerge en aquellas situaciones normadas por el Prædiciere. Para el pensamiento y lenguaje variacional, la predicción consiste en la determinación de un estado desconocido de un fenómeno con base en el estudio sistemático y lógico del cambio y la variación que presentan las variables de estos fenómenos. (pp. 110–111).

De la idea central de predecir la evolución de un fenómeno de variación se reconstruye la serie de Taylor, ya que es considerada como el instrumento predictor (Muñoz-Ortega, 2010). Según Hernández (2006) "[…] la serie de Taylor es tratada como un acercamiento Cauchiano, basado en el dominio de las funciones y su convergencia" (p. 3).

La noción del *Prædiciere* se ubicó como el motor de una larga y prolífica secuencia de desarrollos teóricos que miraban a los fenómenos físicos desde la perspectiva de la matemática tomándose como instrumento predictor a la serie de Taylor (Cantoral, 1990).

La predicción de un estado ulterior de movimiento se basa sobre un sistema de transformaciones que permiten pasar de un estado inicial a otro en cualquier instante, al considerar variaciones (primera y segunda), lo cual provocó una modificación profunda en la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Hernández, 2006). La predicción es una práctica normada por la práctica social del Prædiciere (Cantoral, 2016).

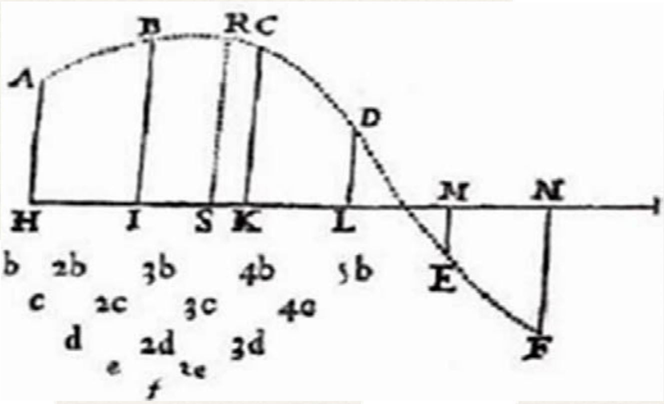
En el siglo XVIII se descubrió la expansión en series de varias funciones trascendentales, tal es el caso de la serie de Taylor. La expansión de las series infinitas se desarrolló con los métodos de interpolación. Según Hernández (2006) "Taylor obtiene su serie a partir del límite del argumento basado en la fórmula de Gregory-Newton" (p. 97). Esto se da a través de un proceso geométrico de diferenciaciones sucesivas de una función al centrase en la práctica de interpolación.

> En 1687, cuando Isaac Newton publicó su obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica … En ella, Newton no sólo presentó una teoría de cómo se mueven los cuerpos en el espacio y en el tiempo, sino que también desarrolló las complicadas matemáticas necesarias para analizar esos movimientos. Además, Newton postuló una ley de la gravitación universal, de acuerdo con la cual cada cuerpo en el universo era atraído por cualquier otro cuerpo con una fuerza que era tanto mayor cuanto más masivos fueran los cuerpos y cuanto más cerca estuvieran

el uno del otro. Newton pasó luego a mostrar que, de acuerdo con su ley, la gravedad es la causa de que la Luna se mueva en una órbita elíptica alrededor de la Tierra, y de que la Tierra y los planetas sigan caminos elípticos alrededor del Sol. (Hawking, 2011, p. 12).

Las diferencias sucesivas fueron utilizadas por Newton con base en una gráfica. En dicha gráfica se establecen los órdenes de variación representados por las letras *b,c,d,e y f* (ver figura 4).

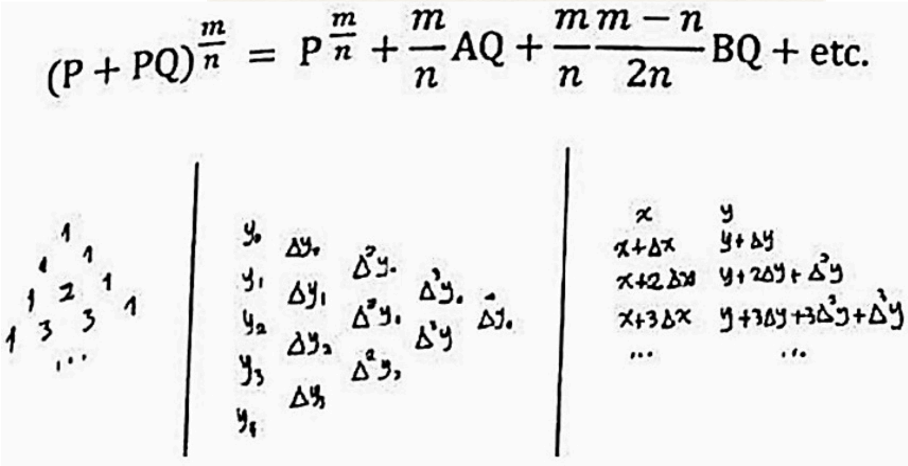
Figura 4. Escrito original de Newton: diferencias sucesivas



Fuente: Cantoral (2016).

En el comportamiento de dichas diferencias sucesivas se observa la regularidad binomial de acuerdo con los coeficientes de los términos de la variable dependiente (figura 5).

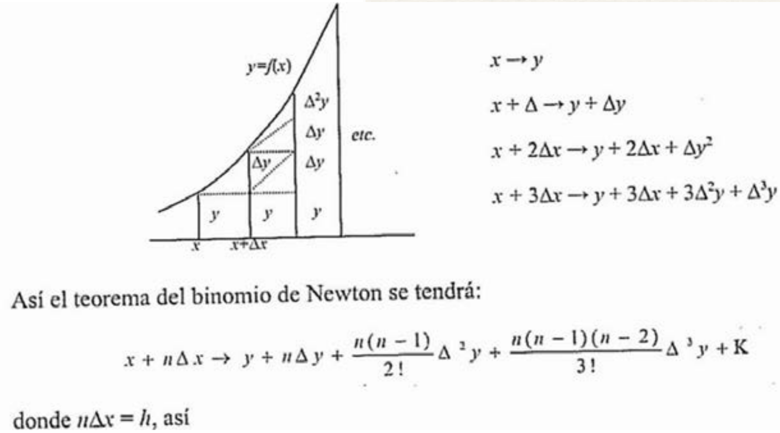
Figura 5. Modelo de regularidad binomial



Fuente: Cantoral (2001).

Con base a las diferencias sucesivas, el triángulo de Pascal, la regularidad binomial y el binomio de Newton se construye la serie de Taylor (ver figuras 6 y 7).

Figura 6. Del binomio de Newton a la serie de Taylor



Fuente: Cantoral, 2001.

Figura 7. La serie de Taylor en notación funcional

$$x + h \rightarrow y + \frac{\Delta y}{\Delta x} h + \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \frac{h(h-x)}{2!} + \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{3!} + \ldots$$

Vale la pena observar, como una nota colateral, que en este modelo adquieren un sentido holístico la posición del número m en las expresiones $\Delta^m y$ ó Δy^m, lo que suele decirse o interpretarse hoy en día como mera notación.

En los siguientes corolarios hace la operación de toma al límite cuando n tiende a infinito [Taylor, 1715] pp. 23, quedando finalmente

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Fuente: Cantoral, 2001.

Se analizaron diversas investigaciones sobre la serie de Taylor relacionadas con la práctica social de predicción, tal es el caso del estudio de Cantoral (1990) donde analiza las circunstancias que hacen posible la construcción de conocimiento matemático al estudiar fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. Realiza un estudio sobre la relación entre la predicción que corresponde a las ciencias físicas y lo analítico referente a la matemática. Hace un análisis de textos originales de: Galileo, Newton, Clairaut, D´Alembert, Euler, Fourier, Lagrange, Taylor, entre otros; con la finalidad de aportar elementos para la construcción del *Prædiciere* que permita reconocer a la serie de Taylor como el instrumento predictor.

El pensamiento y lenguaje variacional se desarrolla a partir de las ideas de Newton. En estas ideas se presenta la noción de *Prædiciere* como la acción y efecto de predecir el estado ulterior de acuerdo con el estado de facto (estado inicial) con el reconocimiento de patrones de regularidad que permiten reconocer al todo solo con mirar la parte. La serie de Taylor es un concepto matemático que permite predecir estados futuros. Es por ello “que se hace necesario hablar de la serie de Taylor en el sentido de conocer sus inicios; su origen; cómo fue el tratamiento de esta a través de la historia; y cómo fue desarrollada por matemáticos de aquellas épocas" (Cantoral, 1990, p. 10).

El binomio de Newton fue creado a partir de la práctica social de predicción (Sierra, 2008). El binomio "[…] se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que precisan de la predicción […]". (Cantoral, 2016, p. 96).

La serie de Taylor tiene sus orígenes en el binomio de Newton. Es por ello que, en el trabajo de Hernández (2006) se realiza un estudio epistemológico sobre la reconstrucción de la serie de Taylor a partir del binomio de Newton. Ya que los estudios de Newton se centraron en los movimientos de los cuerpos, tal como señala Hawking (2011):

> En 1687, cuando Isaac Newton publicó su obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica […] En ella, Newton no sólo presentó una teoría de cómo se mueven los cuerpos en el espacio y en el tiempo, sino que también desarrolló las complicadas matemáticas necesarias para analizar esos movimientos. (p. 12).

Una reconstrucción de la serie de Taylor se presenta en los párrafos siguientes:

Al obtener datos de fenómenos físicos se generan tablas numéricas por lo que se hace necesario pasarlas al contexto algebraico (variables). Posteriormente se calculan las diferencias entre cada valor de la variable dependiente. Seguido de las diferencias de las diferencias (segundas diferencias). Se calculan las velocidades (razones de cambio) de todas las diferencias. Al considerar las condiciones iniciales del sistema (estado inicial y sus variaciones) se puede predecir el futuro del sistema, es aquí donde se encuentra el nacimiento de la serie de Taylor.

Percibimos en nuestros días la coexistencia de dos modelos asociados con la Serie; uno delineado con las ideas de Newton y culminado con las ideas de Lagrange, donde la Serie de Taylor adquiere un significado propio en las ciencias físicas, lo que haría de ella un instrumento adecuado para el análisis de fenómenos naturales. En contraparte, un segundo modelo surgido del trabajo de Cauchy (quién reconstruye el Cálculo basado en el concepto de límite), en el que toma a la serie como un teorema más de la teoría, una consecuencia del concepto de límite y del teorema del valor medio y forma parte del capítulo de convergencia de series infinitas. (Cantoral, 2001, p. 123).

En el siglo XVIII, el Cálculo de los Bernoulli y colaboradores, se basó en los aportes de Leibniz, centrándose en métodos para resolver problemas físicos. Este Cálculo tenía como base al cálculo algebraico que permitía a los matemáticos integrar y derivar funciones continuas (polinomios, exponenciales y trigonométricas) (Farfán, 1997).

En el siglo XVIII se origina un problema de la Física Matemática, el de la cuerda vibrante. El problema consiste en determinar su movimiento (vibración de la cuerda). El cual fue abordado por D' Alambert, Euler, D. Bernoulli, Taylor, Lagrange (Farfán, 1997). El problema de las curvas discontinuas surge del problema de la cuerda vibrante. "Es con los trabajos de Newton que se da el paso cualitativamente decisivo al señalar que es en el estudio de la evolución, digamos inicial, en donde se determina completamente el desarrollo ulterior del fenómeno." (Cantoral, 1990, p. 135).

Cantoral (1990) establece que, los fenómenos de flujo se analizan con la diferencia del tipo:

$$\omega\,(A + dA) - \omega\,(A)$$

En las que *ω* puede representar a una variedad amplia de parámetros físicos particulares.

Resulta factible contar con una colección de datos que formen parte de una información inicial, local o instantánea, con los que habrá de anunciar la manera en que se comportará el fenómeno. De ahí que la colección.

h,A,ω (A),ω^' (A),ω^" (A),etc.

Permita predecir el parámetro físico observado: ω (A+h). Con ello se podrá analizar la diferencia fundamental.

$$\omega\,(A+dA)-\omega\,(A)$$

Dicha diferencia indica el comportamiento de las variaciones en el punto A, esto es:

$$\omega\,(A+dA)-\omega\,(A) = \omega'(A)\,h + \omega''(A)\,\frac{h}{2!} + \omega'''(A)\frac{h^3}{3!} + \quad \ldots$$

Así la expresión:

$$f\,(x+h) = f\,(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,\frac{h^2}{2!} + \quad \ldots$$

> Significa al fenómeno, al establecer una relación primaria entre el estado vecino *f (x+h)* con el estado primitivo caracterizado por un conjunto infinito numerable de datos *x,h,f(x),f^' (x),f^'' (x),[…]* la serie de Taylor se constituye pues en el instrumento mediante el cual aquellos fenómenos de flujo en la naturaleza serán analizados. Así la descripción de la evolución mediante la predicción, cristalizará en el instrumento de predicción que le es adecuado. (Cantoral, 1990, pp. 137 y 138).

En 1687 se publica la obra de Newton: *Philosophia Naturalis Principia Mathematica Mathematica*; derivada del problema de describir el movimiento de los planetas alrededor del sol (contexto astronómico) con base en la predicción. Newton parte lo general y abstracto hasta llegar a lo particular y concreto. La obra consta de tres libros que contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. Lo que implica que, en el campo de la mecánica enunció sus tres famosas leyes del movimiento y con base a ello su Ley de la Gravitación Universal (Pérez, 2019).

La herramienta del cálculo infinitesimal fue creada y desarrollada por Newton y Leibniz. Newton se centraba en la predicción de fenómenos naturales con el uso de métodos dinámicos-geométricos. En los análisis consideró al tiempo como un elemento infinitesimal (Pérez, 2019).

En la obra de Lagrange (1797) se plantea el desarrollo de una función en serie de Taylor, en la cual se considera a la derivada como una función y no como un cociente (Espinoza, 2009). Por lo que, las reglas del álgebra son la base. La analiticidad, de acuerdo con Espinoza (2009), se considera como una práctica social que norma la construcción de conocimiento matemático.

> Newton (1643 - 1727) asoció el manejo de las series infinitas al estudio de las velocidades de cambio […] las series infinitas nacen como una necesidad funcional para el estudio del movimiento … planteó como objetivo de la mecánica el predecir cierta evolución sin plantear las causas inherentes del movimiento […] (Espinoza, 2019, p. 13).

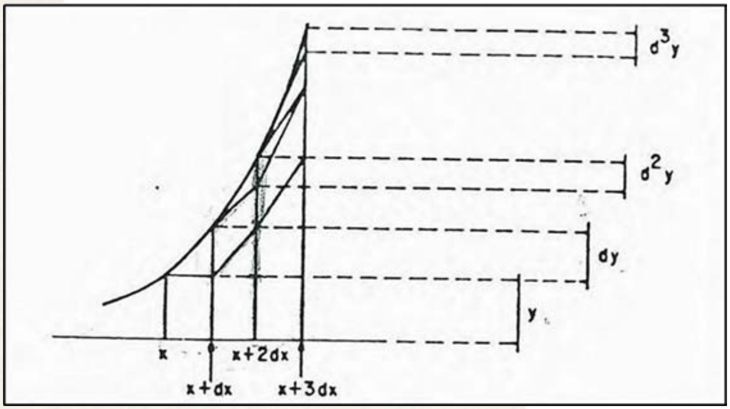
Espinoza (2019) plantea que, "la obra de Lagrange como una organización de la matemática de su época tomando la idea germinal de la predicción como elemento que sustenta su construcción matemática relativa al desarrollo de funciones en series de Taylor." (p. 13). El autor también señala que, "el significado varía con base al contexto y al uso del conocimiento […] la noción de "significación", la cual es entendida como un proceso de adquisición progresiva del significado […]" (Espinoza, 2019, p. 20).

En el año de 1696 L'Hôpital publicó el primer libro de texto sobre cálculo diferencial.

> L'Hôpital no considera a las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua y así la diferencial (o diferencias como él las llamó), son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen dichas variables (Cantoral, 1990, p. 147).

Así también, realiza una interpretación geométrica de la segunda diferencial (segunda diferencia), tercera diferencial (tercera diferencia) y así sucesivamente. Por lo que se obtiene una visión distinta de la serie de Taylor (figura 8).

Figura 8. Diferenciales



Fuente: Cantoral (1990, p. 152).

Entonces:

$$f(x) = y$$
$$f(x + dx) = y + dy$$
$$f(x + 2dx) = y + 2dy + d^2 y$$
$$f(x + 3dx) = y + 3dy + 3d^2 y + d^3 y$$

En el que los coeficientes se comportan como lo hace el binomio de Newton. “En el año de 1715 se publicó el *Methodus incrementorum* directa et inversa de Taylor en el que aparece la primera publicación expresa del [...] teorema de Taylor”. (Cantoral, 1990, p. 153).

Expresado de la siguiente manera:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

En 1742, como señala Cantoral (1990):

> Maclaurin desarrolla criterios para la determinación de máximos y mínimos a partir de la Serie de Taylor [...] En tanto que Taylor y Maclaurin desarrollaron sus ideas con el cálculo newtoniano [...] Las variables en esta concepción del cálculo fluyen en el tiempo físico, de ahí que todas las relaciones de derivación que se realicen serán respecto al tiempo [...] (p. 157).

En el siglo XVIII surgen las propuestas de:

> Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) con su definición de límite y el estudio de los cocientes finitos de los elementos infinitesimales [...] la de J. L. Lagrange sustentada en el desarrollo de la serie de potencias de las funciones [...] este afirma que toda función puede ser desarrollada en serie de Taylor. Con esto, el Cálculo sería solo una parte del álgebra con sus operaciones y algoritmos propios. (Cantoral, 1990, p. 175).

Muñoz (2006) plantea que:

> En el periodo que abarca parte del siglo XVIII y el siglo XIX los marcos epistémicos ya no se referían a los fenómenos de variación o cambio como en los periodos anteriores, lo cual generó el inicio de los procesos de fundamentación del Cálculo y la emergencia del Análisis Matemático. (p. 215).

4.3. Desarrollo histórico de circuitos eléctricos

El desarrollo histórico de circuitos eléctricos se remonta a los primeros años de la aparición del hombre. Hace 120 mil años el hombre (Homo Sapiens) conoció el primer fenómeno eléctrico perceptible por sus sentidos, llamado rayo. Este fenómeno destruía provocaba fuego a la vegetación y dañaba a los animales. Estos hombres concebían al rayo como signo de furia o de magia procedentes de algún dios muy poderoso (Poveda, 2003). Los fenómenos eléctricos se podían observar (en la atracción de objetos), tal como señala Braun (2003):

> Desde tiempos inmemoriales el hombre se dio cuenta de que después de frotar con paño un tipo de resina llamada ámbar, esta adquiría la capacidad de atraer algunos objetos ligeros, como trozos de papel. La historia registra a Tales de Mileto, filósofo y matemático griego, que vivió hace unos 2 600 años, como el primero que hizo experimentos de esta naturaleza [...] En griego ámbar se dice elektron y de esta palabra se deriva electricidad. (p. 10).

En los experimentos que realizaba Niccolo Cabeo (1586-1650), en 1629, descubrió el fenómeno de la repulsión eléctrica entre cargas del mismo signo (Poveda, 2003). Por lo que, “existen en la naturaleza dos tipos de cargas eléctricas: positiva y negativa [...] dos cargas eléctricas del mismo tipo se repelen, mientras que dos cargas de tipo distintos (positiva - negativa) se atraen” (Braun, 2003, p.11). Según Poveda (2003), “[...] hasta mediados del siglo XVII la única manera que se conocía de electrizar un cuerpo era frotándolo con un paño, manualmente [...]. Otto Von Guericke inventó su máquina electrostática, la primera en la historia de esta ciencia” (p. 136).

> Un científico francés, François du Fay (1698-1739), hizo otro tipo de experimentos que reportó entre 1733 y 1734. Frotó con tela de seda dos tubos de vidrio iguales. Al acercarse los tubos vio que siempre se repelían. Así concluyó que dos materiales idénticos se repelan cuando

> se electrifican en formas idénticas. Como cada uno de los tubos adquiere el mismo tipo de carga se puede afirmar que cargas iguales se repelen. (Braun, 2003, p. 11).

En el siglo XVIII, según Braun (2003):

> Se inició la investigación detallada de los fenómenos eléctricos. Entre 1729 y 1736 dos científicos ingleses, Stephen Gray (1696-1736) y Jean Desaguliers (1683-1744) dieron a conocer una serie de resultados de experimentos eléctricos muy cuidadosos. Encontraron que, si unían por medio de un alambre metálico un tubo de vidrio previamente frotado con un trozo de corcho, este se electrificaba. Comprobaron que el trozo de corcho se electrificaba ya que al acercarle trozos de papel éstos eran atraídos por él. Este fenómeno persistía aun si el vidrio y el corcho se separaban a distancias de 300 metros. (p. 10).

En 1729, según Bernal (1979), Stephen Gay descubrió un modo de transmitir la electricidad. La electricidad producida por el frotamiento de una varilla de vidrio puede ser transmitida a grandes distancias (hacia otros objetos). Su principal contribución fue que la electricidad podía fluir de un lugar a otro, sin que se produjera aparentemente ningún movimiento en la materia y también encontró que la electricidad puede acumularse en aquellos cuerpos en que se genera a los que llamó no-conductores. Por otro lado, la electricidad que fluye a través de los metales les llamo conductores. Según Braun (2003):

> Benjamín Franklin (1706 - 1790) realizó estos mismos descubrimientos en Estados Unidos […] Según él, el vidrio electrificado había adquirido un exceso de fluido (carga) eléctrico, y le llamó a este estado positivo.

> Al estado de la seda con la que frotó el vidrio lo llamó negativo, pues consideraba que había tenido una deficiencia de fluido (carga) eléctrico. (p. 11).

Franklin establece que sólo existe una clase de electricidad representada como un fluido inmaterial existente en todos los cuerpos (Bernal, 1979). La electricidad es considerada como una propiedad de todos los cuerpos. Es así que, como señala Braun (2003):

> La electrificación era un efecto que se presentaba en la superficie de los cuerpos, en donde aparecía lo que llamaron una “virtud” o “fluido” eléctrico al que en la actualidad se le llama carga eléctrica. Encontraron que la carga eléctrica podía moverse libremente de un cuerpo a otro a través de ciertos materiales que llamaron conductores (el cuerpo humano, los metales, el aire húmedo, etc.). También existen materiales que no conducen electricidad, a los que se llama aislantes o no conductores (la madera, la seda, la cerámica, etcétera). (p. 10).

La botella de Leyden fue construida con la finalidad de almacenar electricidad. Que como señala Bernal (1979):

> La botella de Leyden fue el primer artefacto para almacenar energía. En 1745, Von Kleist [...] intentó hacer pasar la electricidad a una botella, valiéndose de un clavo. Al estar sosteniendo con una mano el clavo y con la otra la botella, recibió lo que vino a ser el primer choque eléctrico producido artificialmente [...] el holandés Musschenbroek (1692 - 1761) consiguió realizar el mismo experimento” (p. 578).

Posteriormente, Faraday desarrolló este artefacto al aumentar su capacidad de almacenamiento, al cual le llamó condensador (capacitor).

> Al inicio del siglo XVIII las investigaciones científicas buscaban la forma de condensar el fluido eléctrico (concepción considerada hoy en día como imprecisa) para no perder la electricidad generada por las máquinas basadas en el frotamiento de cuerpos. Esto llevó a la invención accidental del primer capacitor (dispositivo para almacenar energía eléctrica) en 1745 por el clérigo alemán E. G. Von Kleist, después de recibir varias sacudidas por descargas eléctricas. Aunque las consideraciones teóricas no eran correctas del todo, se pudo desarrollar un dispositivo eléctrico de uso común aún en nuestros días (Barragán, Núñez, Cerpa, y Rodríguez, 2014, p. iv).

> En 1784, Charles Coulomb demostró, en París, que la fuerza entre las cargas está inversamente relacionada con el cuadrado de la distancia que las separa. En 1791, Luigi Galvani, profesor de anatomía en la Universidad de Boloña, Italia, experimentó con los efectos de la electricidad en los nervios y músculos de animales. La primera celda voltaica, con capacidad de producir electricidad gracias a la acción química de un metal que se disuelve en un ácido, fue desarrollada por otro italiano, Alessandro Volta, en 1799. Esta celda voltaica permite concentrar cargas positivas en un extremo y cargas negativas en el otro. "En 1799, Volta anunció la invención de la pila voltaica con la que se pudo producir una corriente eléctrica continua por primera vez" (Barragán, Núñez, Cerpa, y Rodríguez, 2014, p. iv).

Alessandro Volta (1745-1827) construye una pila y logra establecer corrientes eléctricas estables.

> Los primeros trabajos realizados por Thompson sobre la electricidad, se orientaban a partir de analogías matemáticas entre los fenómenos térmicos y eléctricos. En ese período, tal y como afirma Harman (1982), se exploraron diversas analogías físicas y matemáticas entre las leyes del calor y de la electricidad, y a partir de la obra de Fourier sobre el flujo de calor, Georg Simon Ohm (1787-1854) describió un análisis similar mediante el flujo de electricidad, estableciendo analogías entre la tensión de la corriente y la temperatura y la cantidad de electricidad y el calor. (Cano, Gómez y Cely, 2009, p. 29).

La teoría de los circuitos era independiente del electromagnetismo, con conceptos y métodos propios.

> En el periodo de 1826 a 1827, un físico alemán, George Simon Ohm (1789 - 1854), introdujo una importante relación entre el potencial, la corriente y la resistencia, conocida actualmente como ley de Ohm. Empezó sus experimentos sobre corrientes eléctricas en 1825. Inicialmente, utilizó las pilas de Volta, pero más tarde las sustituyó por elementos termoeléctricos de cobre - bismuto que había inventado T. J. Seebeck en 1823, y que daban una f.e.m. (voltaje) mucho más estable, lo que le permitió establecer su célebre ley: $i= E/((R+r))$ en la que i representa la intensidad de la corriente; E, la f.e.m.; R, su resistencia interna; y r, la resistencia del circuito exterior (Fraile, 2012).

William Thomson y Lord Kelvin (1824 - 1907) estudiaron circuitos RC y RL en corriente directa. Posteriormente, resolvieron ecuaciones diferenciales en configuración RLC. En estos circuitos el capacitor guarda energía eléctrica (carga eléctrica) construido por dos placas conductoras paralelas separadas por un material aislante llamado dieléctrico. Faraday "realizó un extenso trabajo en un dispositivo de almacenamiento que llamó condensador, al cual conocemos actualmente como capacitor. Faraday propuso la idea de agregar un dieléctrico entre las placas de un capacitor para incrementar su capacidad de almacenamiento" (Boylestad, 2011, p. 5). Entonces, una de las variables que se puede medir en el capacitor es el voltaje de carga o de descarga.

Heinrich Göbel (1818-1893) creó una fuente de luz para interiores, en 1854 fabricó la primera bombilla eléctrica del mundo. Posteriormente, Thomas Alva Edison (1847 - 1931) inventó la bombilla eléctrica apta para el mercado. En 1807, en Londres (Inglaterra), se encendió por primera vez el alumbrado de gas. Por lo que, Edison quería sustituir el alumbrado de gas por luz eléctrica. En 1879 inventó su bombilla eléctrica para comenzar la era de la luz eléctrica y en 1882 construyó la primera central eléctrica. El filamento de la bombilla es un conductor eléctrico, cuando fluye la corriente los electrones chocan con los átomos al pasar y de ese choque se desprende parte de su energía como consecuencia la agitación de los átomos es cada vez mayor y el filamento del conductor se enciende. Como a mayores temperaturas el filamento de carbono va aumentando su conductividad y con ella aumenta también la intensidad de la corriente (Päch y Franke, 1991).

> El libro de Gilbert es el primer gran tratado sobre la electricidad como ciencia y como teoría […] para Gilbert las partículas del fluido eléctrico, que emanan del cuerpo electrizado, rodean al cuerpo que encuentran

> y lo transportan (mientras tengan energía) a la fuente de la cual son emitidos. (Poveda, 2003, p. 135)

A mediados del siglo XIX Gustav Robert Kirchhoff presentó una serie de leyes de voltajes y corrientes (Boylestad, 2011). En 1897 Joseph Thomson (1856-1940) descubrió el electrón, una partícula muy pequeña y ligera que cualquier átomo. En 1904 Thomson desarrolló un modelo atómico que establecía al electrón como un elemento constitutivo fundamental para el desarrollo de la electricidad, estos electrones se consideraron con carga negativa (Päch y Franke, 1991). El estudio de estas partículas tuvo gran desarrollo dándose las bases para la teoría de la electricidad.

> El estado de agitación extrema continuó hasta principios del siglo XIX, cuando Hans Christian Oersted, profesor danés de física, dio a conocer en 1820 una relación entre el magnetismo y la electricidad que sirve como base para la teoría del electromagnetismo como la conocemos en la actualidad. En el mismo año, un físico francés, André Ampère, demostró que alrededor de un conductor que transporta corriente se presentan efectos magnéticos y que éstos pueden atraerse o repelerse como los imanes [...] En 1831, un físico inglés, Michael Faraday, demostró su teoría de la inducción electromagnética, según la cual una corriente cambiante en una bobina puede inducir una corriente cambiante en otra, aunque ambas bobinas no estén conectadas directamente. James Clerk Maxwell, un profesor escocés de filosofía natural, realizó extensos análisis matemáticos para desarrollar las ecuaciones de Maxwell, las cuales apoyan los esfuerzos de Faraday de vincular los efectos eléctricos y magnéticos. Maxwell también desarrolló, en 1862, la teoría electromagnética de la luz, la cual, entre otras cosas, reveló

que las ondas electromagnéticas viajan a través del aire a la velocidad de la luz. En 1888, Heinrich Rudolph Hertz, un físico alemán, comprobó mediante experimentación con ondas electromagnéticas de baja frecuencia (microondas), las predicciones y ecuaciones de Maxwell. (Boylestad, 2011, p. 5).

John Dalton (1766 - 1844) estudió a los átomos con el método científico. Los átomos se reordenan al producirse una reacción química. Dalton especulaba debido a que no pudo verlos. En el siglo XIX se observó que los átomos son divisibles, formados por partículas pequeñas. En 1897 Joseph Thomson (1856 - 1940) descubrió el electrón siendo una partícula muy pequeña. En 1904 Thomson desarrolló un modelo atómico que establecía al electrón como un elemento constitutivo fundamental, los electrones están cargados negativamente (Päch y Franke, 1991).

Bernal (1979) señala que, las leyes de la electricidad y el magnetismo fueron construidas sobre un modelo newtoniano, y que la teoría atómica de los químicos fue una consecuencia directa de las especulaciones atómicas de Newton. En el siglo XVIII se generalizaron los principios de la mecánica, lo que permitió el estudio de la electricidad y el calor. “La electricidad fue la primera ciencia nueva que surgió después del periodo newtoniano [...] fue casi el único aspecto de la ciencia física al que no dedicó Newton [...]” (p. 576).

En el estudio de Hinojos y Farfán (2018) se establece la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué relación existe entre la propagación del calor y la electricidad? Esta pregunta se genera debido al obstáculo epistemológico del paradigma sustancialista. Es así que, realizan un estudio de los trabajos de Ohm, Thomson y Maxwell (ubicados en el siglo XIX).

> En el trabajo de Ohm, identificamos que la hipótesis de Fourier que dice que el flujo de calor es proporcional al grado de temperatura, le permitió comparar el efecto de la fuerza electroscópica (voltaje) con la temperatura y la conducción eléctrica con el flujo de calor […] A lo largo de su trabajo, Ohm realiza ciertas consideraciones respecto a la naturaleza de la electricidad, entre ellas podemos identificar el uso de expresiones tales como: el movimiento de la electricidad, el fenómeno eléctrico actúa, la fuerza electroscópica (u) que depende de la distancia (x) que recorre la electricidad y el tiempo (t), entre otros. Estos argumentos al explicar la naturaleza de la electricidad dejan ver que la considera como una sustancia. (Hinojos y Farfán, 2018, p. 585–586).

En el trabajo de Maxwell acerca de la electricidad y el magnetismo establece que la electricidad es una cantidad física medible y no es posible asegurar que sea una sustancia o manifestación de energía:

> El flujo de electricidad corresponde al flujo de calor, el potencial corresponde a la temperatura, y, la electricidad fluye de los lugares con potencial mayor a aquellos con menor, como ocurre con el calor que fluye de lugares con mayor temperatura hacia aquellos con menor. (Hinojos y Farfán, 2018, p. 589).

Maxwell trabaja con ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de la electricidad que es matemáticamente idéntica a la de Fourier (calor).

4.4. Mediación social con Contexto de Predicción en un circuito eléctrico para la Transposición didáctica de la Serie de Taylor

En el presente apartado se plantea la mediación social como mecanismo de dos tipos de transposiciones: del contexto de la cinemática al contexto de los circuitos eléctricos y del saber histórico-epistemológico de la serie de Taylor al discurso matemático Escolar con la finalidad de contribuir a su rediseño. Como parte de la difusión institucional es de interés llevar el conocimiento a la escuela con el objetivo de democratizar el aprendizaje de la matemática con la finalidad de que el saber sea accesible para todos (Pérez, 2019; Paz, 2019; Ríos, 2020).

Para el rediseño del discurso matemático escolar los saberes a enseñar sufren transformaciones al convertirse en objetos de enseñanza, tal como señala Chevallard (1998):

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar; sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado transposición didáctica. (p. 45).

Por lo que existe "la exigencia de buscar buenas transposiciones de los saberes correspondientes a las demandas didácticas de la sociedad" (Chevallard, 1998, p. 54). Los docentes solo se centran en proporcionar definiciones, demostraciones y en reconocer algunas aplicaciones del concepto matemático; por lo que estos objetos de saber considerados como objetos de enseñanza generan diversos problemas de aprendizaje. La socioepistemología, según Sierra (2008), establece que:

> Los objetos matemáticos no solo viven en el aula, sino que estos objetos trascienden más allá del uso escolar, es decir: los alumnos llevan su conocimiento al contexto sociocultural mediante el uso, lo reconocen en su vida cotidiana. Los conocimientos en uso pasan a la escuela y regresan a la vida en un tránsito sin fin. (p. 6).

Entonces, el proceso de transposición didáctica es indispensable para reconocer las transformaciones que sufren los objetos matemáticos para ser abordados dentro y fuera del aula.

Como mecanismo de mediación social de las transposiciones se diseñaron actividades de Predicción donde se requiere medir y calcular la evolución posterior de un sistema de variación contextualizado en un circuito eléctrico:

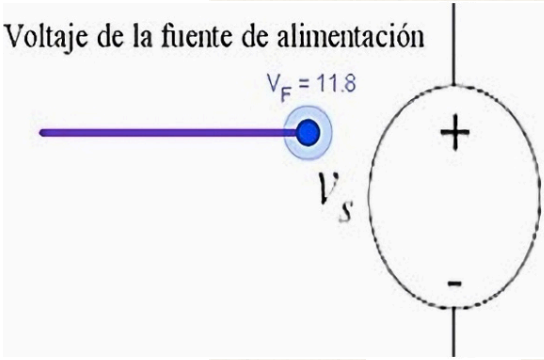
Situación de aprendizaje 1. Interacción con la simulación

A. Abre el archivo: CIRCUITO_RC_CARGA

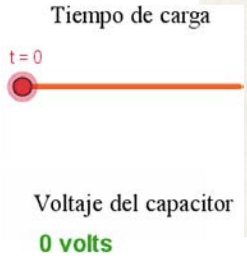
(ver en https://www.geogebra.org/m/udbvym32).

B. Modifica el deslizador que representa la fuente de alimentación. Coloca un voltaje de **11.8** (ver figura 9).

Figura 9. Deslizador



C. Modifica el deslizador de tiempo de carga. Completa la tabla.



Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en vols
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
55	
60	
65	

Situación de aprendizaje 2. Predicción del voltaje de carga

A. Retoma los datos de la tabla anterior.

Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
55	
60	
65	

B. Realiza lo siguiente:

Calcula el voltaje al transcurrir 50 segundos.

Indica el resultado: ______________.

Calcula el voltaje al transcurrir 65 segundos.

Indica el resultado: ______________.

Para explorar la Dimensión Cognitiva se pretende identificar cómo los participantes abordan las Actividades de Predicción diseñadas previamente.

Para ello se toma en cuenta que, para el estudio de la variación y el cambio se involucran dos o más variables. El proceso cognitivo requiere del desarrollo del sentido de covariación. Esto se refiere a la coordinación de dos variables (cantidades que varían entre sí) en situaciones de variación (Dolores, 2010; Caballero - Pérez y Cantoral, 2017). En este caso las principales variables a coordinar son: el voltaje de carga y el tiempo.

> La dimensión cognitiva del saber analiza las formas de apropiación y significación que experimentan quienes se encuentran en situación de construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento situado en su acción de significar y resignificar. La dimensión social y cultural del saber está centrada en los roles que juegan los actores y el papel que tiene el saber en la construcción de consensos, la elaboración y adaptación de instrumentos mediadores y los usos del saber en situaciones específicas. (Caballero, 2018, p. 34).

Los aspectos cognitivos que caracterizan al pensamiento variacional se identifican por el contexto en el que suceden para dar sentido y significado a los objetos matemáticos. Por ejemplo, en el estudio de Solís (1999), sobre el fenómeno de la propagación del calor, se identifican dos tipos de comportamientos: continuo y discreto. En el continuo el calor se propaga en el medio (la barra) conforme pasa el tiempo; en el discreto el calor se mueve (en la barra) por cada pedazo (cada punto de la barra). La propagación del calor es un fenómeno que se dificulta observarlo a simple vista, pero que sí se percibe por el sentido del tacto. En dicho análisis la variable se considera al calor que se mueve en un medio (objeto) y la temperatura como su medida.

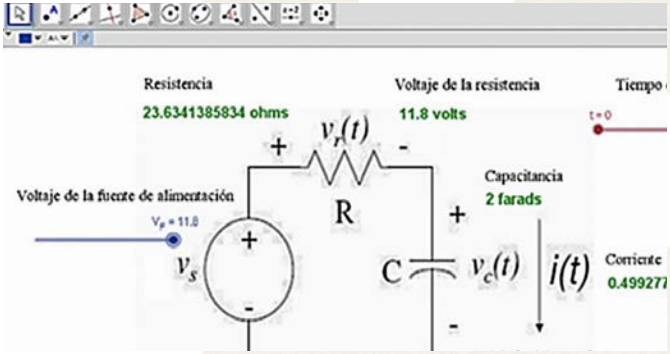
Para los aspectos cognitivos se tomará en cuenta los resultados obtenidos de cuatro participantes al experimentar con las actividades en situación de predicción. La implementación se llevó a cabo en un laboratorio de cómputo de la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) de la Habana, Cuba. En el taller asistieron dos participantes: un ingeniero industrial de Colombia y una profesora normalista de México (ver figura 10). En otra sesión, el taller se llevó a cabo con dos participantes: una profesora con formación en ingeniería civil y otra con formación en ingeniería mecatrónica (ver figura 11).

Figura 10. Participantes en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Figura 11. Profesoras participantes

Al inicio del taller se proyectaron algunas diapositivas con la finalidad de dar una introducción al tema. Posteriormente se interactuó con una simulación en GeoGebra (véase la figura 12) de un circuito RC (configuración resistencia-capacitor) con la finalidad de llenar una tabla sobre el voltaje de carga del capacitor respecto al tiempo. Al completar la tabla se les pidió que hicieran la predicción del voltaje de carga en dos tiempos posteriores (50s y 65s).

Figura 12. Applet de GeoGebra



Los resultados obtenidos de los cuatro participantes sobre la actividad de predicción se presentan en los siguientes apartados:

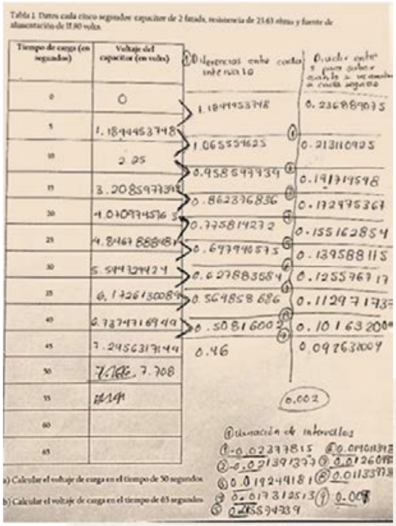
4.4.1. Participante con formación en Ingeniería Civil

Los resultados (ver figura 13) que presenta una de las profesoras son los siguientes:

Analizó la diferencia que existe entre el segundo 5 y el 0; el 10 y el 5; el 15 y el 10; el 20 y el 15; y así sucesivamente hasta el 45 y 40 considerándose todos los decimales de la calculadora científica. Identificó que el voltaje va en aumento, pero cada vez más lento. Posteriormente, dividió cada variación entre 5 que es el valor de cada intervalo. Seguido determinó las diferencias de las diferencias, pero para cada segundo. Realizó la operación de 0.213110925-0.236889075= -0.02377815 y así calculó todas las demás diferencias. Por lo que logró identificar que la variación es de aproximadamente 0.002 permitiendo predecir el voltaje a los 50 segundos de la siguiente manera:

La variación 0.092632004 del tiempo de 45 segundos le suma la variación aproximada de 0.002 (lo consideró constante) obteniendo el resultado de 0.092632004+ 0.002=0.094632004. Posteriormente, lo multiplicó por 5 para obtener la variación en todo el intervalo (de 45 a 50 segundos): 0.094632004 (5)=0.47316002. Seguido retomó el estado inicial y le sumó su variación: 7.2456317144+ 0.47316002=7.718791734 por lo que tomó como el valor de predicción, a los 50 s, a 7.708 volts. Para dicho análisis se consideró al segundo orden de variación para la predicción, tomándose como modelo el siguiente: *Estado inicial+Variación+Variación de la variación=Estado futuro.*

Figura 13. Resultados del participante



4.4.2. Participante con formación en Ingeniería Mecatrónica

La profesora completa la tabla al interactuar con la simulación en GeoGebra (ver figura 14). Calcula las diferencias para cada intervalo de tiempo, es decir, realiza la operación (razón del voltaje y el tiempo) de:

$$\frac{1.1844 - 0}{5 - 0} = 0.23688$$

Lo que le da la variación en cada segundo dentro del intervalo comprendido entre 0 y 5 segundos. Así también realiza las operaciones para los otros intervalos:

$$\frac{2.25 - 1.1844}{10 - 5} = \frac{1.0656}{5} = 0.41312$$

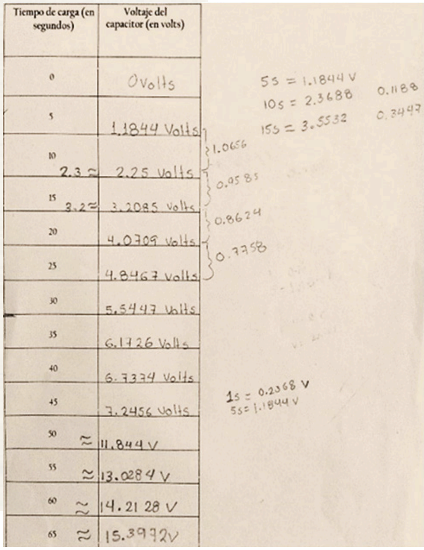
$$\frac{3.2085 - 2.25}{15 - 10} = \frac{0.9585}{5} = 0.1917$$

$$\frac{4.0709 - 3.2085}{20 - 15} = \frac{0.8624}{5} = 0.17248$$

$$\frac{4.8467 - 4.0709}{25 - 20} = \frac{0.7758}{5} = 0.15516$$

Reconoce que el voltaje aumenta en cada segundo, pero se da cuenta que las variaciones para cada intervalo van en disminución. La profesora se da cuenta que al multiplicar el voltaje en 1 segundo (0.23688) por el tiempo correspondiente obtiene una buena aproximación, es decir, al realizar las operaciones de 0.23688 (5)≈1.1844 volts; 0.23688 (10)≈2.3688 volts; 0.23688 (15)≈3.5532volts; 0.23688 (20)≈4.7376 volts; y así sucesivamente. Por lo que retoma el voltaje en 1 segundo para predecir el voltaje en el tiempo de 50 segundos al realizar la operación de 0.23688 (50)≈11.844 volts. Así también utiliza el mismo procedimiento para predecir el voltaje a los 65 s al realizar la operación de 0.23688 (65)≈15.3972 volts.

Figura 14. Resultados del participante



Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)
0	0 volts
5	1.1844 Volts
10 2.3 ≈	2.25 volts
15 3.2≈	3.2085 volts
20	4.0709 volts
25	4.8467 volts
30	5.5447 Volts
35	6.1726 Volts
40	6.7374 Volts
45	7.2456 Volts
50 ≈	11.844 V
55 ≈	13.0284 V
60 ≈	14.2128 V
65 ≈	15.3972V

1.0656
0.0585
0.8624
0.7758

5s = 1.1844 V
10s = 2.3688
15s = 3.5532

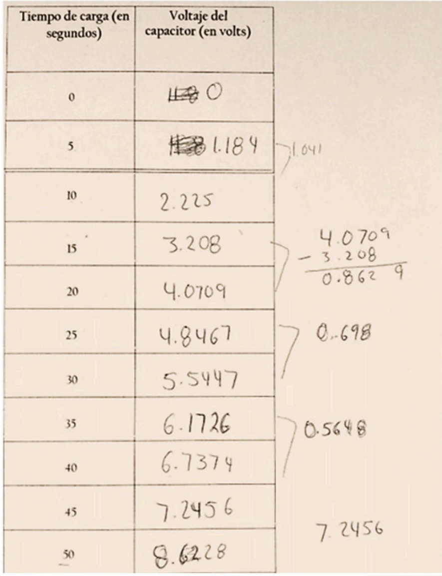
0.1188
0.3447

1s = 0.2368 V
5s= 1.1844 V

4.4.3. Participante Normalista

En los resultados que presenta la profesora normalista (ver figura 15) nos damos cuenta de que tiene un pequeño error al colocar el voltaje en el tiempo de 10s, es decir, ella coloca 2.225 en vez de 2.25. Al iniciar el proceso calcula la diferencia entre el tiempo de 5 y 10 segundos, realizando la operación de 2.225-1.184=1.041 , seguido calcula la diferencia en el tiempo de 20 y de 15 s, es decir, 4.0709-3.208=0.8629 , después realiza la diferencia de 5.5447-4.8467=0.698 ; la diferencia de 6.7374-6.1726=0.5648 ; y con esa información trata de predecir el voltaje en el tiempo de 50 s. Se da cuenta que el voltaje va aumentando en el tiempo por lo que el voltaje tiene que ser mayor al anterior, debido a que solo calcula cuatro diferencias no observa la regularidad. Realiza su predicción de 8.6228 volts en el tiempo de 50 s. En dicho análisis se observa que no reconoce los órdenes de variación que le permita predecir.

Figura 15. Resultados del participante



Tiempo de carga (en segundos)	Voltaje del capacitor (en volts)
0	0
5	1.184
10	2.225
15	3.208
20	4.0709
25	4.8467
30	5.5447
35	6.1726
40	6.7374
45	7.2456
50	8.6228

1.041

4.0709
- 3.208
0.862 9

0.698

0.5648

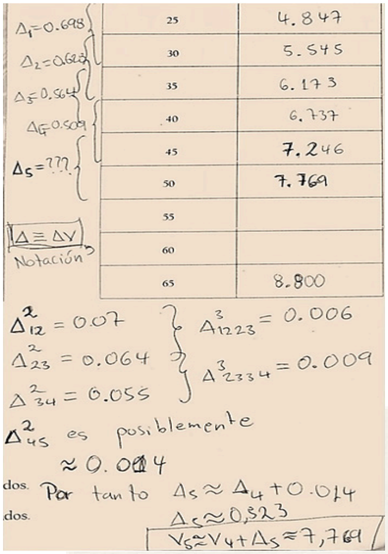
7.2456

4.4.4. Participante con formación en Ingeniería Industrial

Al iniciar el taller, el participante señaló que en sus cursos de Cálculo vio a la serie de Taylor como un proceso algebraico, para aproximar funciones mediante un polinomio en un punto específico. Al analizar los resultados (ver figura 16) observamos que coloca cada voltaje del capacitor redondeándolo a tres decimales. Después, calcula las diferencias: Δ_1=5.545- 4.847=0.698 , Δ_2=6.173-5.545=0.628 , Δ_3=6.737-6.173=0.564 y Δ_4=7.246-6.737=0.509 ; con la notación delta. Reconoce que ΔV es la variación de voltaje. Posteriormente calcula las diferencias de las diferencias: $\Delta_{12}^2 = \Delta_1 - \Delta_2$= 0.698-0.628=0.07 , $\Delta_{23}^2 = \Delta_3 - \Delta_2 =$

0.628-0.564=0.064 , $\Delta_{34}^{2} = \Delta_{4} - \Delta_{3}$ = 0.564-0.509 = 0.055. Por último, calcula las terceras diferencias $\Delta_{1223}^{3} = \Delta_{12}^{2} - \Delta_{23}^{2}$= 0.07-0.064 = 0.006 , $\Delta_{2334}^{3} = \Delta_{23}^{2} - \Delta_{34}^{2}$ = 0.064-0.055 = 0.009 , entonces aproxima la segunda diferencia Δ_{45}^{2} con un valor de 0.014 de acuerdo a las segundas diferencias anteriores, es decir, se da cuenta que la variación en cada segunda diferencia es cada vez menor. Por lo tanto, para predecir la variación Δ5, lo aproxima con la expresión $\Delta_{4} + \Delta_{45}^{2} \approx$ 0.509+0.014 ≈ 0.523. Dicho modelo corresponde al primer orden de variación de la Serie de Taylor. Y para predecir el voltaje: $V_5 \approx V_4$ (*en 45s*)+ Δ_5 ≈7.246+0.523 = 7.769 por lo que se aproxima al valor que da la simulación de GeoGebra en el tiempo de 50s, es decir, al valor de 7.7027842954 volts. Cabe señalar que retoma el modelo de predicción: *Estado inicial* + *Variación* = *Estado futuro.* Todas las diferencias fueron positivas, porque, en ocasiones calculó el *Estado inicial-Estado siguiente* y en otras calculó *Estado posterior-Estado anterior.* Para la predicción en el tiempo de 65 segundos no se observa procedimiento.

Figura 16. Resultados del participante



Con base en todo lo anterior, se presenta una reconstrucción didáctica de la serie de Taylor en contexto de un circuito eléctrico RC desde las primeras variaciones (diferencias), la variación de la variación (segundas diferencias) y así sucesivamente. Dichas variaciones sucesivas llevaron al descubrimiento del binomio de Newton y luego a la reconstrucción de la Serie de Taylor. En este caso se establece la transposición adaptándose a un circuito eléctrico RC como contexto para operar la mediación social, en donde se coordinan las variables: voltaje de carga y tiempo; enseguida se describe dicha reconstrucción:

La variable voltaje en un circuito eléctrico RC se considera como un recipiente que almacena electrones, dicho recipiente otorga electrones para el funcionamiento del circuito, en este caso, para cargar el capacitor. La carga representa la cantidad de electrones que hay en el recipiente (voltaje). El flujo de electrones (carga) que circula en el circuito eléctrico se le llama corriente eléctrica, dicho de otra manera, la corriente es la cantidad de electrones (carga) que se mueven en el circuito eléctrico respecto al tiempo. El voltaje de carga (en volts) del capacitor es medido a través de un multímetro digital. La medición de la corriente en un circuito eléctrico RC se complica, debido a que es muy pequeña en comparación con el voltaje y además cambia con respecto al tiempo. Es por ello que, para resignificar la Serie de Taylor se analiza el comportamiento de la variable voltaje de carga con respecto al tiempo, sin dejar de lado el comportamiento de la corriente, la carga y la resistencia.

Entonces, con base en las actividades de aprendizaje previamente diseñadas, que se refiere a la interacción con el modelo físico (circuito eléctrico RC) se realizan las mediciones del voltaje de carga completando una tabla de valores. Para dicha medición es indispensable elegir la variación de la variable independiente (tiempo), por lo que, es este caso se consideraron intervalos de cinco minutos. En dicha situación se realizaron diez mediciones, pero para la reconstrucción se retomarán solo seis (ver figura 17).

El siguiente proceso es pasar de lo numérico a lo algebraico, es decir, generalizar las variables al representarlas por medio de literales (letras) con subíndices ($T_0, T_1, T_2 \ldots V_0, V_1, V_2 \ldots$), respectivamente.

Figura 17. De lo numérico a lo algebraico

RECONSTRUCCIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR

Tabla numérica

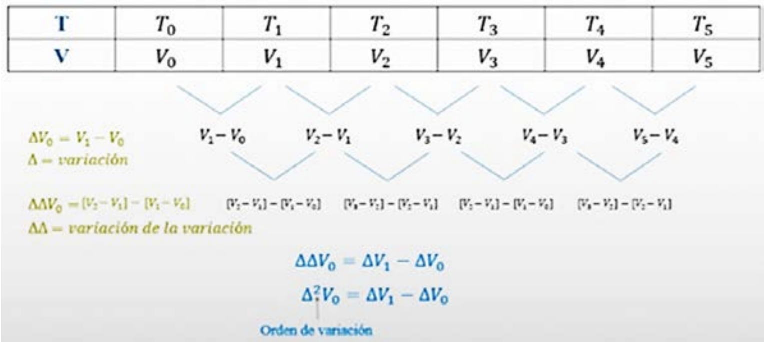
T	0	5	10	15	20	25
V	0	1.18	2.25	3.21	4.07	4.85

Tabla algebraica

T	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
V	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5

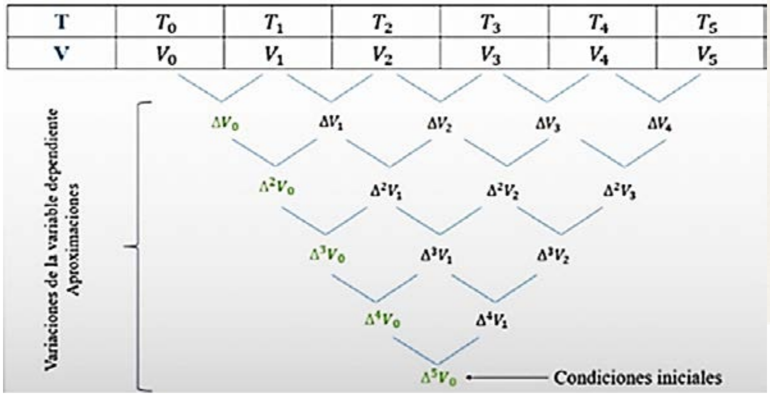
La variable tiempo y el voltaje de carga se operan para calcular las diferencias. Estas diferencias representan un primer orden de variación de la variable dependiente ($\Delta V_0 = V_1 - V_0, \Delta V_1 = V_2 - V_1, \Delta V_2 = V_3 - V_2, \ldots$). La notación Δ (delta) representa la variación, por lo que, para el segundo orden de variación ($\Delta\Delta$) se calculan las diferencias de las diferencias ($\Delta\Delta V_0 = \Delta V_1 - \Delta V_0, \Delta\Delta V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_1, \ldots$), y así sucesivamente hasta calcular todas las diferencias de la tabla (ver figura 18). La notación delta se puede compactar de la siguiente manera (a partir del segundo orden de variación): $\Delta\Delta V_0 = \Delta^2 V_0$, $\Delta\Delta\Delta V_0 = \Delta^3 V_0$, $\Delta\Delta\Delta\Delta V_0 = \Delta^4 V_0$, y así sucesivamente.

Figura 18. Primeras diferencias



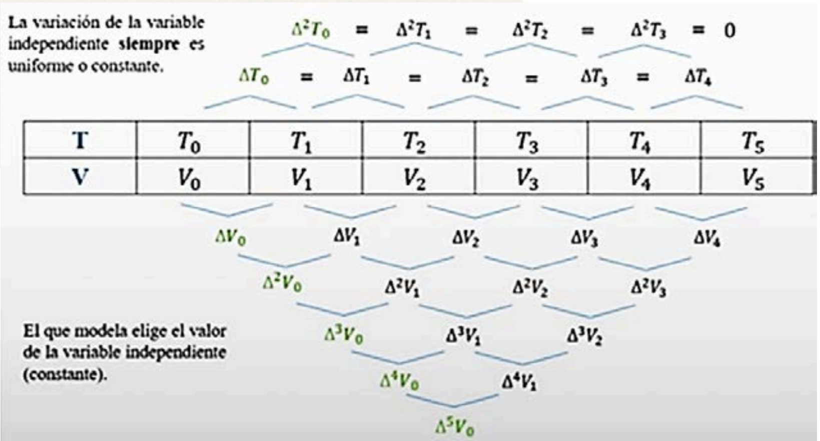
Al observar todas las variaciones (diferencias sucesivas) se identifica que el total de órdenes de variación es el número de datos a considerar menos uno, es decir, si elegimos a seis mediciones tendremos cinco órdenes de variación. Así también, en cada orden de variación las diferencias van disminuyendo, es decir, si se eligen las seis mediciones, en el primer orden de variación se calculan cinco diferencias, en el segundo orden se calculan cuatro diferencias, en el tercero se calculan tres y así sucesivamente hasta calcular la última diferencia (ver figura 19).

Figura 19. Diferencias de las diferencias



Con respecto a las variaciones de la variable independiente se deben hacer algunas consideraciones: la variación de dicha variable debe ser constante (uniforme) y el que modela elige tal variación. En este caso, como se mencionó anteriormente, las mediciones se realizaron cada cinco segundos, por lo que la variación del tiempo es cada cinco segundos. Esta condición se reflejará en los órdenes de variación, por ejemplo, en el primer orden de variación el valor de cada diferencia es igual *($\Delta T0 = \Delta T1 = \Delta T2 = \Delta T3 = \Delta T4$)*. En el segundo orden de variación todas las diferencias son igual a cero, por lo que, en los siguientes órdenes de variación también son cero (ver figura 20).

Figura 20. Diferencias de la variable dependiente e independiente



Newton señalaba que el cociente de las variaciones *($\Delta V/\Delta T$)* calcula la velocidad de la variable dependiente, en este caso, la velocidad del voltaje (ver figura 21). Por lo que, para modelar las velocidades del voltaje en el primer orden de variación obtenemos:

$$\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}, \quad \frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}, \quad \frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}, \quad \frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}, \quad \frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$$

Figura 21. Cociente de diferencias (velocidad)

¿Cómo relacionamos ΔV y Δt ?

$\frac{\Delta V}{\Delta T}$ Newton decía que el cociente mide o calcula la velocidad de la variable dependiente.

$$Velocidad = \frac{\Delta V\,(variación\ del\ voltaje)}{\Delta T\ (variación\ del\ tiempo)} = \dot{V}$$

Modelar las velocidades del voltaje

T	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
V	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5

$\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}$ $\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}$ $\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}$ $\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}$ $\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$

Al calcular la velocidad de la velocidad del voltaje (segundo orden de variación) y al realizar las operaciones algebraicas (ver figura 22) se obtiene la segunda variación $\left({\Delta^2 V_0}/{\Delta {T_0}^2}\right)$.

Figura 22. Diferencias de las velocidades

Modelar las velocidades del voltaje

T	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
V	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5

Velocidades del voltaje: $\frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}$ $\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}$ $\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}$ $\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}$ $\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}$

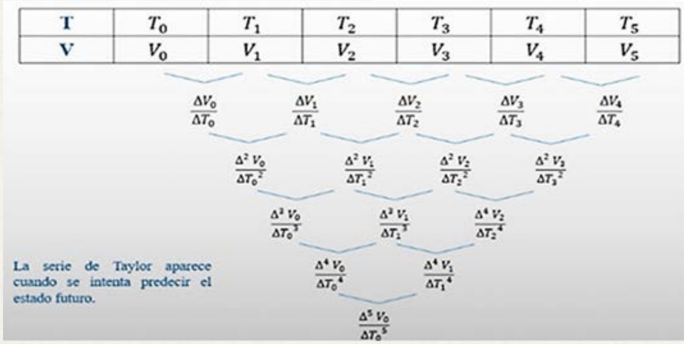
Velocidad de la velocidad del voltaje: $\frac{\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1} - \frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}}{T_1 - T_0}$ $\frac{\frac{\Delta V_2}{\Delta T_2} - \frac{\Delta V_1}{\Delta T_1}}{T_2 - T_1}$ $\frac{\frac{\Delta V_3}{\Delta T_3} - \frac{\Delta V_2}{\Delta T_2}}{T_3 - T_2}$ $\frac{\frac{\Delta V_4}{\Delta T_4} - \frac{\Delta V_3}{\Delta T_3}}{T_4 - T_3}$ $\frac{\frac{\Delta V_5}{\Delta T_5} - \frac{\Delta V_4}{\Delta T_4}}{T_5 - T_4}$

$$\frac{\frac{\Delta V_1 \Delta T_0 - \Delta V_0 \Delta T_1}{\Delta T_0\, \Delta T_1}}{\Delta T_0} = \frac{\frac{\Delta V_1}{\Delta T_1} - \frac{\Delta V_0}{\Delta T_1}}{\Delta T_0} = \frac{\frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta T_1}}{\Delta T_0} = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta T_0\, \Delta T_1} = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_0}{\Delta {T_0}^2} = \frac{\Delta^2 V_0}{\Delta {T_0}^2}$$

Nacimiento de la serie de Taylor: presente del sistema (condiciones iniciales) – futuro del sistema.

Así sucesivamente con todos los órdenes de variación al tomar en cuenta que el cambio del tiempo es el mismo (ver figura 23). El nacimiento de la serie de Taylor se presenta al considerar el presente del sistema (condiciones iniciales) para predecir el estado futuro del sistema.

Figura 23. Predicción del voltaje



Para predecir el voltaje *(V_5)* se considera el estado inicial *(V_0)* más la suma de todas las variaciones *($\Delta V_0, \Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \Delta V_4$)* para obtener el estado futuro. Para determinar dichas variaciones se toma en cuenta las condiciones iniciales, es decir, todas las variaciones quedan en función de las condiciones iniciales *($\Delta V_0, \Delta^2 V_0, \Delta^3 V_0, \Delta^4 V_0, \Delta^5 V_0$)* tal como se muestra en la figura 24.

Figura 24. Origen de una regularidad

$$V_0 + \text{ variación larga} = V_5$$

$$V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = V_5$$

$$\text{Estado inicial} + \text{ suma de variaciones} = \text{estado futuro}$$

$$\Delta V_1 - \Delta V_0 = \Delta^2 V_0$$
$$\Delta V_1 = \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = \Delta^2 V_1$$
$$\Delta V_2 = \Delta^2 V_1 + \Delta V_1$$
$$\Delta V_2 = \Delta^2 V_1 + \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$

$$\Delta^2 V_1 - \Delta^2 V_0 = \Delta^3 V_0$$
$$\Delta^2 V_1 = \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0$$

$$\Delta V_2 = \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta V_0 = \Delta^3 V_0 + 2\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$

$$V_0 + \text{ variación larga} = V_5$$

$$V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = V_5$$

$$\text{Estado inicial} + \text{ suma de variaciones} = \text{estado futuro}$$

$$\Delta V_3 - \Delta V_2 = \Delta^2 V_2$$
$$\Delta V_3 = \Delta^2 V_2 + \Delta V_2$$

$$\Delta^2 V_2 - \Delta^2 V_1 = \Delta^3 V_1$$
$$\Delta^2 V_2 = \Delta^3 V_1 + \Delta^2 V_1$$
$$\Delta^3 V_1 - \Delta^3 V_0 = \Delta^4 V_0$$
$$\Delta^3 V_1 = \Delta^4 V_0 + \Delta^3 V_0$$

$$\Delta V_3 = \Delta^3 V_1 + \Delta^2 V_1 + \Delta^3 V_0 + 2\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$
$$\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + \Delta^3 V_0 + \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0 + \Delta^3 V_0 + 2\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$
$$\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + 3\Delta^3 V_0 + 3\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$$

Si retomamos la primera variación del voltaje: $\Delta V_0 = V_1 - V_0$; su coeficiente es: 1.

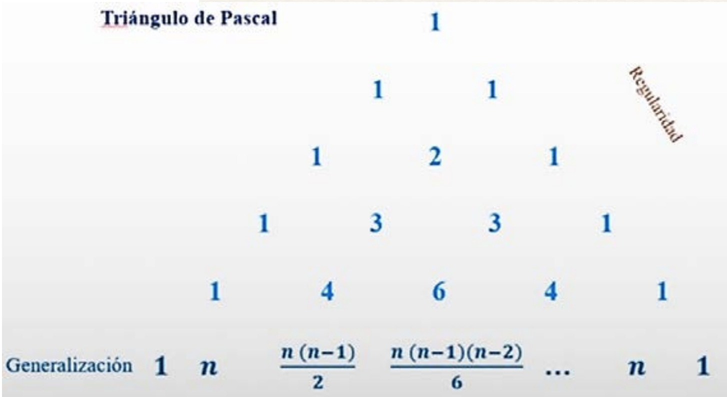
La segunda variación del voltaje: $\Delta V_1 = \Delta^2 V_0 + \Delta V_0$; sus coeficientes son: 1 y 1.

La tercera variación del voltaje: $\Delta V_2 = \Delta^3 V_0 + 2\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$; sus coeficientes son: 1, 2 y 1.

La siguiente variación del voltaje: $\Delta V_3 = \Delta^4 V_0 + 3\Delta^3 V_0 + 3\Delta^2 V_0 + \Delta V^0$; sus coeficientes son: 1, 3, 3 y 1.

Y la otra variación del voltaje: $\Delta V_4)= \Delta^5 V^0 + 4\Delta^4 V^0 + 6\Delta^3 V_0 + 4\Delta^2 V_0 + \Delta V_0$; sus coeficientes son: 1, 4, 6, 4 y 1. Por lo que la regularidad de los coeficientes se relaciona con el triángulo de Pascal (ver figura 25).

Figura 25. Regularidad triángulo - binomio de Newton



Al retomar la generalización del triángulo de Pascal y al evaluarlo en el modelo predictivo:

$V_0 + \Delta V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \Delta V_{n-1} = V_n$

Se obtiene:

$$V_0 + n\Delta V_0 + \frac{n(n-1)\Delta^2 V_0}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 V_0}{3!} + \cdots + n\Delta^{n-1} V_0 + \Delta^n V_0 = V_n$$

La variación del tiempo $= T_n - T_0$

Las variaciones del tiempo son iguales

$$\Delta T_0 = \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4 = \Delta T_n$$

Entonces

$$n\Delta T_0 = T_n - T_0$$

Despejando n

$$n = \frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}$$

Sustituyendo en

$$V_0 + n\Delta V_0$$

Se obtiene

$$V_0 + \frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\,\Delta V_0 = V_0 + \frac{\Delta V_0}{\Delta T_0}\,(T_n - T_0)$$

Al sustituir en el siguiente término se obtiene la expresión de la figura 26.

Figura 26. Hacia la serie de Taylor

$$\frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right]\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0} - 1\right]\Delta^2 V_0}{2!} = \frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right]\left[\frac{T_n - T_0 - \Delta T_0}{\Delta T_0}\right]\Delta^2 V_0}{2!}$$

$$\frac{\frac{[T_n - T_0]^2\,\Delta^2 V_0}{\Delta {T_0}^2} - \frac{[T_n - T_0]\,\Delta T_0\,\Delta^2 V_0}{\Delta {T_0}^2}}{2!}$$

Donde:

$$\frac{[T_n - T_0]\,\Delta T_0\,\Delta^2 V_0}{\Delta {T_0}^2} = 0$$

Entonces:

$$\frac{\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0}\right]\left[\frac{T_n - T_0}{\Delta T_0} - 1\right]\Delta^2 V_0}{2!} = \frac{\Delta^2 V_0}{2!\,\Delta {T_0}^2}[T_n - T_0]^2$$

Y al sustituir en los siguientes términos y simplificar las operaciones algebraicas se construye la serie de Taylor:

$$V_0 + \frac{dV_0}{dT_0}(T_n - T_0) + \frac{d^2V_0}{2!\ dT_0{}^2}(T_n - T_0)^2 + \frac{d^3V_0}{3!\ dT_0{}^3}(T_n - T_0)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{d^nV_0}{n!\ dT_0{}^n}(T_n - T_0)^n = V_n$$

CAPÍTULO 5

UNA HISTORIA SOCIOGENÉTICA DEL CÁLCULO INTEGRAL Y SU COGNICIÓN: TIPOS DE MEDIACIÓN SOCIOCULTURAL Y ACTIVIDADES DE MEDIR EL PRESENTE PARA CALCULAR EL FUTURO

Germán Muñoz Ortega

Introducción

Presentamos una historia sociogenética del cálculo integral. Usamos la historia para fundamentar elementos cognitivos (campo conceptual). Con base en lo anterior, para analizar la interacción entre la componente sociogenética y el sistema cognitivo, fue necesario caracterizar los mecanismos de mediación social y cultural. Para entender los mecanismos se construyeron *tipos de mediación sociocultural.* Se presentan evidencias de algunos tipos de mediación (ver los diversos capítulos de este libro). Siempre es necesario luchar contra los reduccionismos y fronteras disciplinares, entonces la noción de mediación social permite fluir de la Epistemología a la Psicología y luego a la Sociología (y todas las combinaciones posibles). También de la Matemática Educativa a la Educación y luego a la Antropología (y todas las combinaciones posibles). Encontramos un punto de convergencia en los mecanismos de mediación social que nos permitió desarrollar una *teoría emergente* (ver apartado sobre tipos de mediación sociocultural) para caminar hacia una Educación Intercultural en Chiapas (ver Capítulo 6 de este libro).

5.1. Tipos de mediación sociocultural

Al analizar una aproximación sociocultural a la mente (Wertsch, 1993) es necesario describir algunos matices para la investigación de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, como consecuencia de considerar las prácticas sociales:

a) Distinguir el papel de los instrumentos de conocimiento del papel de los instrumentos mediadores.

b) Distinguir mediación social vía la situación problema (en tanto objeto de conocimiento) de la mediación social vía la guía del profesor y la mediación social vía las interacciones de otros estudiantes con la situación problema.

c) La mediación social que se presenta de un escenario sociocultural (por ejemplo, la educación formal) al plano interpsicológico y de allí al plano intrapsicológico.

Por ejemplo, para el inciso a) Los instrumentos de conocimiento son inherentes al sistema cognitivo, es decir, son engendrados por la asimilación y tienen su origen en la interacción entre estudiantes como sujeto cognoscente y situación problema en tanto objeto de conocimiento, por ejemplo, *abstracciones y generalizaciones* (ver Piaget y García, 1994, pp. 246-249). Sin embargo, los instrumentos mediadores no surgen asociados al sistema cognitivo, sino que surgen más bien asociados directamente al escenario sociocultural, por ejemplo, *los géneros discursivos y los lenguajes sociales* como instrumentos mediadores; lo cual se puede apreciar en:

> "[…]los instrumentos mediadores a menudo surgen en respuesta a requisitos distintos a la eficacia de las funciones intrapsicológicas o interpsicológicas […] los instrumentos mediadores que dan forma a la acción no suelen surgir en respuesta a las demandas de la acción mediada, ya sea en el nivel interpsicológico o en el intrapsicológico […]" (Wertsch, 1993, p. 53).

Para el inciso b) la mediación social vía la situación problema se puede apreciar desde la Epistemología Genética, por ejemplo:

> "El remontarnos a los niveles precientíficos hasta el nivel mismo de las acciones no significa que debamos considerar solamente el desarrollo del sujeto frente a un objeto que está "dado" independientemente de todo contexto social […] los objetos funcionan ya de cierta manera —socialmente establecida— en relación con otros objetos y con otros

> sujetos. En el proceso de interacción, ni el sujeto ni el objeto son, por consiguiente, neutros [...] Que la atención del sujeto se dirija a determinados objetos (o situaciones) y no a otros; que los objetos se sitúan en determinados contextos y no en otros; que las acciones sobre los objetos están dirigidas de unas maneras y no de otras: todo ello está fuertemente influido por el entorno social y cultural (o por lo que hemos llamado paradigma social). Pero todas estas condiciones no modifican los mecanismos que necesita esa especie biológica tan particular que es el ser humano para adquirir conocimiento de dichos objetos, en dichos contextos, con todos los significados particulares socialmente determinados que le han sido asignados. (Piaget y García, 1994, pp. 244-245).

Por otra parte, la mediación social vía la guía del profesor se puede apreciar en la obra de Vygotski, por ejemplo:

> “[...]El argumento general sobre el origen social de las funciones mentales superiores en el individuo, surge con más claridad en relación con la *zona de desarrollo próximo*, noción que ha concitado recientemente gran atención en Occidente [...] Esta zona se define como la distancia entre el nivel de desarrollo efectivo (del niño), determinado por la resolución independiente de un problema, y el nivel superior de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de problemas con la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capacitados [...]” (Vygotski, 1978, p. 86; citado en Wertsch, 1993, p. 45).

Continuando con el inciso b), otro tipo de mediación social se puede apreciar en la obra de Ferreiro sobre la escritura en tanto objeto de conocimiento, en donde:

> "[…] La escritura tiene una serie de propiedades que pueden ser observadas actuando sobre ella, sin más intermediarios que las capacidades cognitivas y linguísticas del sujeto. Pero además tiene otras propiedades que no pueden ser leídas directamente sobre el objeto, sino a través de las acciones que otros realizan con ese objeto. La mediación social es imprescindible para comprender algunas de sus propiedades […]" (Ferreiro & Teberosky, 1995, pp. 363-364).

Para el inciso c) la mediación social que se presenta de un escenario sociocultural (por ejemplo, la educación formal) al plano interpsicológico y de allí al plano intrapsicológico a través de los géneros discursivos y los lenguajes sociales como instrumentos mediadores, por ejemplo:

"[…] Las ideas de Bajtín […] hacen posible examinar el funcionamiento interpsicológico e

> intrapsicológico concreto sin perder de vista cómo este funcionamiento se ubica en escenarios históricos, culturales e institucionales. De hecho, la concepción de Bajtín sobre los lenguajes sociales y los géneros discursivos, y de los procesos dialógicos de los que ellos se apropian, garantizan, por lo menos, la centralidad de la relación entre el proceso psicológico y el escenario sociocultural." (Wertsch, 1993, p. 144).

En este tipo de mediación se presenta una privilegiación, es decir, "La privilegiación se refiere al hecho de que un instrumento mediador, tal como un lenguaje social, se concibe como más apropiado o eficaz que otros en un determinado escenario sociocultural." (Wertsch, 1993, p. 146). Por otra parte:

> " […] al centrarse en los géneros discursivos como instrumentos mediadores, uno recuerda constantemente que la acción mediada se encuentra inextrincablemente unida a escenarios históricos, culturales e institucionales, y que el origen social de las funciones mentales individuales se extiende más allá del nivel de funcionamiento interpsicológico […]" (Wertsch, 1993, p. 166).

Todo lo anterior nos proporcionará referentes acerca de lo que ocurre cuando intentamos transponer un *marco epistémico* del siglo XVII en la sociedad contemporánea (el objeto de conocimiento común es derivado del marco epistémico de Newton) e investigar cómo se constituye un *marco epistémico contemporáneo*, lo cual implica ir desentrañando cómo los instrumentos mediadores (que no surgen asociados directamente con el sistema cognitivo) interactúan con los instrumentos de conocimiento (que son inherentes al sistema cognitivo) cuando se ejerce la práctica social de predecir, es decir, si consideramos a la *acción mediada* (en el sentido de Wertsch, 1993) y al *esquema de acción* (en el sentido de Vergnaud, 1990a) en tanto unidades de análisis vertebradas por un sistema de prácticas sociales que podrían permitir estudiar las relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico cuando el marco epistémico contemporáneo está en vías de constitución. Aún más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar.

5.2. Puesta en escena y epistemología actualizada

Con base en las consideraciones anteriores realizamos varios estudios experimentales con el fin de estudiar la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en instituciones escolares específicas. Por ejemplo, realizamos la puesta en escena de las secuencias de actividades didácticas en varios grupos (entre 25 y 50 alumnos) del primero y segundo semestre de la Licenciatura en Ingeniería Civil durante dos años (ver Muñoz, 2006) así como en varios grupos (entre 5 y 10 alumnos) de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa durante cuatro años (ver Muñoz, 2006), en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. La dinámica de la clase consistió en trabajo individual y en equipos; se registraron, en la medida de lo posible, las producciones de los alumnos. El profesor que realizó la puesta en escena en condiciones cotidianas de la institución escolar fue el autor de este Capítulo; después se procedió al análisis.

Un hallazgo importante consiste en evidenciar que la noción de *constantificación de lo variable* aparece sistemáticamente como intentos de los grupos humanos para cuantificar lo variable en el contexto de la práctica social de predecir en el sentido de construir la posibilidad de sustituir un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante (es decir, subyace la pregunta ¿bajo qué condiciones se puede sustituir un movimiento por otro?) en dos escenarios:

1) *considerando el intervalo completo de tiempo*, los estudiantes construyen la predicción de 44 y la predicción de 8, por ejemplo:

CARLOS SERRANO ZEBADUA
ROGELIO RODRÍGUEZ SOLÍS
JULIO C. VÁZQUEZ GONZÁLEZ

"CINEMÁTICA"

23/03/0.

Hoja de actividades No. 3a

(a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 seg.

* Si nos apoyamos de la formula de $d = vt$, podemos encontrar la posición de la partícula, sabiendo que su punto inicial es de 2 y su velocidad 7 m/s, entonces:

$d = (7)(6) + 2 = 42 + 2 = 44$ La partícula se localiza en la posición 44.

(b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo.

* Como la posición va a estar en función del tiempo, entonces nos queda,

$p(t) = vt +$ punto inicial

(c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo de 6 seg a 12 seg.

* Como la distancia de 6 seg. ya se conoce, solo nos faltaría encontrar la distancia en un tiempo de 12 seg. y despues sacar la diferencia entre ambos tiempos. (sig. hoja)

$d_{(12seg)} = (13)(12) + 2 = 158$

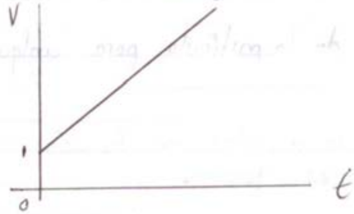
$d_{(6seg)} = 44$

$d_{(12seg)} - d_{(6seg)} = 158 - 44 = 114$

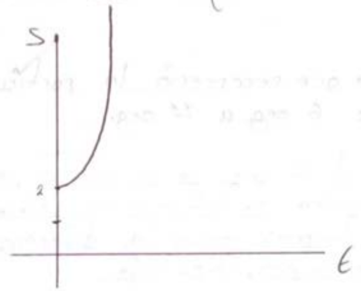
→ la distancia que ha recorrido es de 114

(d) Realizar la grafica de:

velocidad vs tiempo

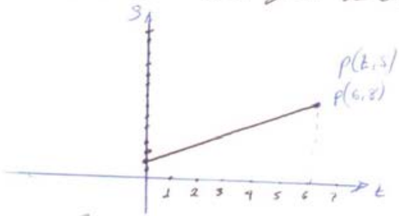


Posición vs tiempo.



Julio César Vázquez González 2° "A"

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 seg



$S(t) = 2 + At$ $\quad A = 1$

$S(6) = 2 + (1)(6)$

$S(6) = 8$

t	0	1	2	3	4	5	6
s	2	3	4	5	6	7	8
t	0	1	2	3	4	5	6
v	1	2	3	4	5	6	7

la posición de la partícula será en el punto P(6,8)

$v = \frac{d}{t}$ $\quad d = vt$ $\quad S_f = vt + S_i$ $\quad S_i$ = posición inicial, S_f = Posición final

$S_f = (7(6)) + 2 = 42 + 2 = 44\,m$

b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo

$t = 3$

$v = \frac{d}{t}$ $\quad d = vt$ $\quad \therefore S_f = vt + S_i$ $\quad S_i$ = Posición inicial, S_f = Posición final

t	0	1	2	3
s	2	3	4	5

t	0	1	2	3
v	1	2	3	4

$S_f = 4(3) + 2 = 12 + 2 = 14\,m$

$S_f = 14\,m$

c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 seg hasta el tiempo 12 seg.

t	6	7	8	9	10	11	12
s	8	9	10	11	12	13	14

t	6	7	8	9	10	11	12
v	7	8	9	10	11	12	13

$d = vt$ $\quad \therefore d_f = vt + 2$

$d_i = 7(6) + 2$ $\quad d_f = 13(12) + 2 = 158$

$d_i = 44$ $\quad d_f = 158$

$\therefore S_f = 158 - 44 = 114\,m$

Distancia recorrida

2) *considerando los intervalos de tiempo mostrados en la tabla de valores*, los estudiantes construyen la predicción de 23 y la predicción de 29, por ejemplo:

INTEGRANTES :
Santa ana Santana Luis Osvaldo
Salas Juarez Braulio
Morales Gomez Jose de Jesus

REPORTE

a) $d = vt + P_0 = (6)(7) + 2 = 44$ mts

a)
$s(t_0) + v t_0 \Delta t_0 = st_1 \quad 2 + (1)(1) = 3$
$st_1 + v(t_1)\Delta t_1 = st_2 \quad 3 + 2 = 5$
$st_2 + v t_2 \Delta t_2 = st_3 \quad 5 + 3 = 8$
$st_3 + v t_3 \Delta t_3 = st_4 \quad 8 + 4 = 12$
$st_4 + v t_4 \Delta t_4 = st_5 \quad 12 + 5 = 17$
$st_5 + v t_5 \Delta t_5 = st_6 \quad 17 + 6 = 23$

b)
$st_x + Vt_x \Delta t_x = st_y.$
$St_{n-1} + Vt_{n-1}\Delta t_{n-1} = St_n$

b)
$S(t_6) = S(t_5) + V(t_5)\Delta t_5$
$S(t_6) = S(t_4) + V(t_4)\Delta t_4 + Vt_5 \Delta t_5$
$S(t_6) = S(t_3) + V(t_3)\Delta t_3 + Vt_4\Delta t_4 + Vt_5 \Delta t_5$
$S(t_6) = S(t_6)$
$\vdots$
$S(t_n) = s(t_0) + V t_0 \Delta t_0 + V t_1 \Delta t_1 - \cdots V t_{n-1} \Delta t_{n-1}$

c)
$st_6 + Vt_6 \Delta t_6 = st_7 = 30$
$st_7 + Vt_7 \Delta t_7 = st_8 = 30 + 8 = 38$
$st_8 + Vt_8 \Delta t_8 = st_9 = 38 + 9 = 47$
$st_9 + Vt_9 \Delta t_9 = st_{10} = 47 + 10 = 57$
$st_{10} + Vt_{10} \Delta t_{10} = st_{11} = 57 + 11 = 68$
$st_{11} + Vt_{11} \Delta t_{11} = st_{12} = 68 + 12 = 80.$

Luis Fernando Chandomí Cruz.
José Isaías Rodríguez Perez.
Jorge Luis Montesinos Toscano.

Hoja de actividad No 3

De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtiene la sgte información:

t(seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v(m/s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

t(seg.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S(m)	2	4	7	11	16	22	29			

a)

$S_1 = S(t_0) + v(t_1)$ $\quad S_1 = 2 + 2 = 4$

$S_2 = S_1 + v(t_2)$ $\quad S_2 = 4 + 3 = 7$ $\quad S_6 = 29\,m$

$S_3 = S_2 + v(t_3)$ $\quad S_3 = 7 + 4 = 11$

$S_4 = S_3 + v(t_4)$ $\quad S_4 = 11 + 5 = 16$

$S_5 = S_4 + v(t_5)$ $\quad S_5 = 16 + 6 = 22$

$S_6 = S_5 + v(t_6)$ $\quad S_6 = 22 + 7 = 29$

b)

$S_1 = S(t_0) + v(t_1)$

$S_2 = S_1 + v(t_2)$

$S_3 = S_2 + v(t_3)$

$S_4 = S_3 + v(t_4)$

$S_5 = S_4 + v(t_5)$

$S_6 = S_5 + v(t_6)$

$\vdots$

$S_n = S_{n-1} + v(t_n)$

c)

$t_6 = 6\,seg$

$S_6 = 29\,m$ $\quad v(t_6) = 7\,m/s$ $\quad v(t_7) = 8\,m/s$

$S_7 = 29 + 8 = 37$ $\quad v(t_{12}) = 13\,m/s$

$S_8 = 37 + 9 = 46$

$S_9 = 46 + 10 = 56$ $\quad$ Para el $t_{12} = 12\,seg$

$S_{10} = 56 + 11 = 67$ $\quad$ la distancia recorrida es de $S = 92\,m$

$S_{11} = 67 + 12 = 79$

$S_{12} = 79 + 13 = 92$

t(seg)	6	7	8	9	10	11	12
v(m/s)	7	8	9	10	11	12	13
S(m)	29	37	46	56	67	79	92

2° A

Luis Fernando Chandomí Cruz
Hoja de Actividades No. 3a (entregar reporte individual)
REPORTE

De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información:

t (seg).	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v (m/s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

t (seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s metros	2									

a) la posición de la partícula es el
si la $d = v \cdot t$ ∴ si $t = 6$ y
V = como no es constante, tenemos que calcular la vel.

$$V_p = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6}{6}$$

$$V_p = \frac{2+3+4+5+6+7}{6}$$

$$V_p = \frac{27}{6} = 4.5$$

Si la formula de $d = V_i \cdot t$ ∴ $d = V_p \cdot t$ =
$d = 4.5 \; 6$
$d = 27.0$ m pero como como la posicion esta ubicada 2 unidade adelante ∴
$d = 27 + 2$ $\quad d = 29$

b) $d = V_p \cdot t + p_o$ donde d = distancia
t = tiempo
V_p = Velocidad promedio
p_o = posición inicial

2° A

Luis Fernando Chandomi Cruz

Hoja de Actividades No. 3a (entregar reporte individual)

→ REPORTE

De una particula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información:

t (seg).	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v (m/s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

t (seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s metros	2									

a) la posicion de la partícula es el si la $d = v \cdot t$ ∴ si $t = 6$ y V = como no es constante, tenemos que calcular la vel.

$$V_p = \frac{V_{t_1} + V_{t_2} + V_{t_3} + V_{t_4} + V_{t_5} + V_{t_6}}{6}$$

$$V_p = \frac{2+3+4+5+6+7}{6}$$

$$V_p = \frac{27}{6} = \underline{\underline{4.5}}$$

Si la formula de $d = V_1 \cdot t$ ∴ $d = V_p \cdot t$ =

$d = 4.5 \cdot 6$

$d = 27.0$ m pero como como la posicion esta ubicada 2 unidade adelante ∴

$d = 27 + 2$ $\underline{\underline{d = 29}}$

b) $d = Vp \cdot t + po$ donde d = distancia

t = tiempo

Vp = Velocidad promedio

po = posición inicial

c) $d = V_p \cdot t + p_0$

$V_p = \dfrac{7+8+9+10+11+12+13}{7} = 10$ $\quad V_p = 10\, m/s$

$t = 6\, s$

$p_0 = 29$

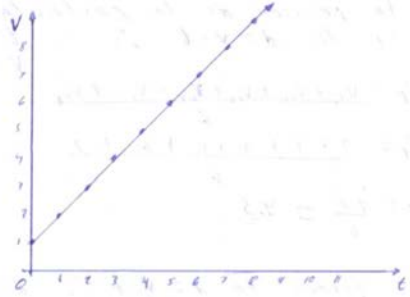
sustituyendo

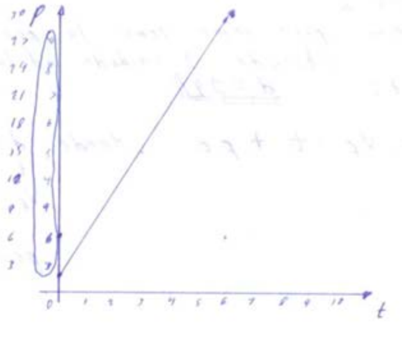
$d = 10 \cdot 6 + 29$

$d = 60 + 29$

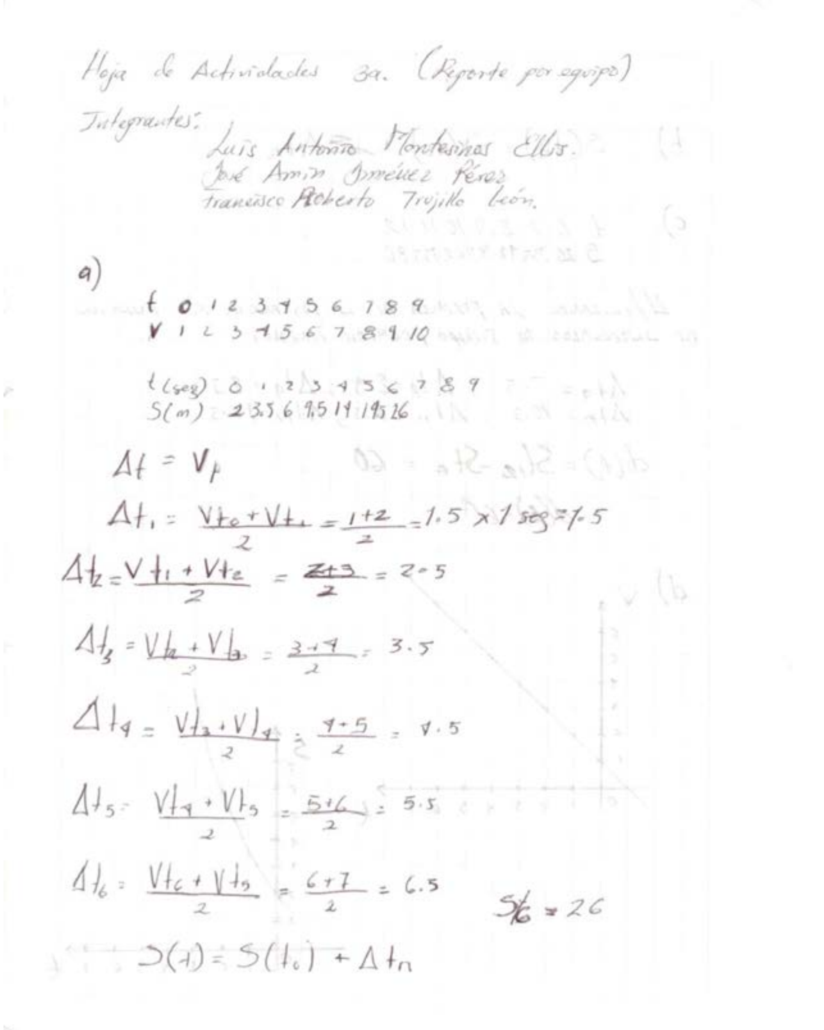
$\boxed{d = 89}$

d)





De los ejemplos anteriores se puede observar que algunos estudiantes acumulan distancias y otros no (los que toman el intervalo completo de tiempo). También la *constantificación de lo variable* se presenta cuando los estudiantes consideran el promedio de las velocidades para llegar a la predicción de 26, por ejemplo:



Hoja de Actividades 3a. (Reporte por equipo)

Integrantes: Luis Antonio Montesinos Ellis.
José Amin Jiménez Pérez
Francisco Roberto Trujillo León.

a)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

t(seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S(m)	2	3.5	6	9.5	14	19.5	26			

$\Delta t = V_p$

$\Delta t_1 = \frac{Vt_0 + Vt_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \times 1\,seg = 1.5$

$\Delta t_2 = \frac{Vt_1 + Vt_2}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$

$\Delta t_3 = \frac{Vt_2 + Vt_3}{2} = \frac{3+4}{2} = 3.5$

$\Delta t_4 = \frac{Vt_3 + Vt_4}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5$

$\Delta t_5 = \frac{Vt_4 + Vt_5}{2} = \frac{5+6}{2} = 5.5$

$\Delta t_6 = \frac{Vt_6 + Vt_7}{2} = \frac{6+7}{2} = 6.5$

$S_6 = 26$

$S(t) = S(t_0) + \Delta t_n$

b) $S(t_n) = S(t_0) + \sum \Delta t_n$

c)

t	6	7	8	9	10	11	12
S	26	33.5	42	51.5	62	73.5	86

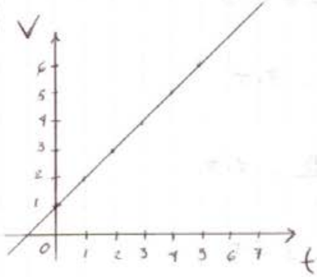
UTILIZANDO LA FORMULA DE LA DISTANCIA EN FUNCIÓN DE INTERVALOS DE TIEMPO PROMEDIO TENEMOS.

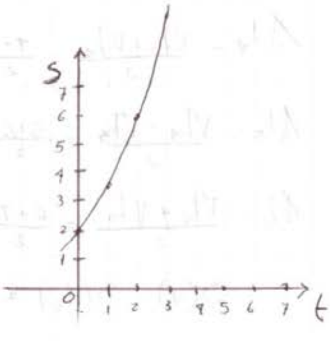
$\Delta t_7 = 7.5$; $\Delta t_8 = 8.5$; $\Delta t_9 = 9.5$
$\Delta t_{10} = 10.5$; $\Delta t_{11} = 11.5$; $\Delta t_{12} = 12.5$

$d(t) = St_{12} - St_6 = 60$

$d(b) = 60$

d)





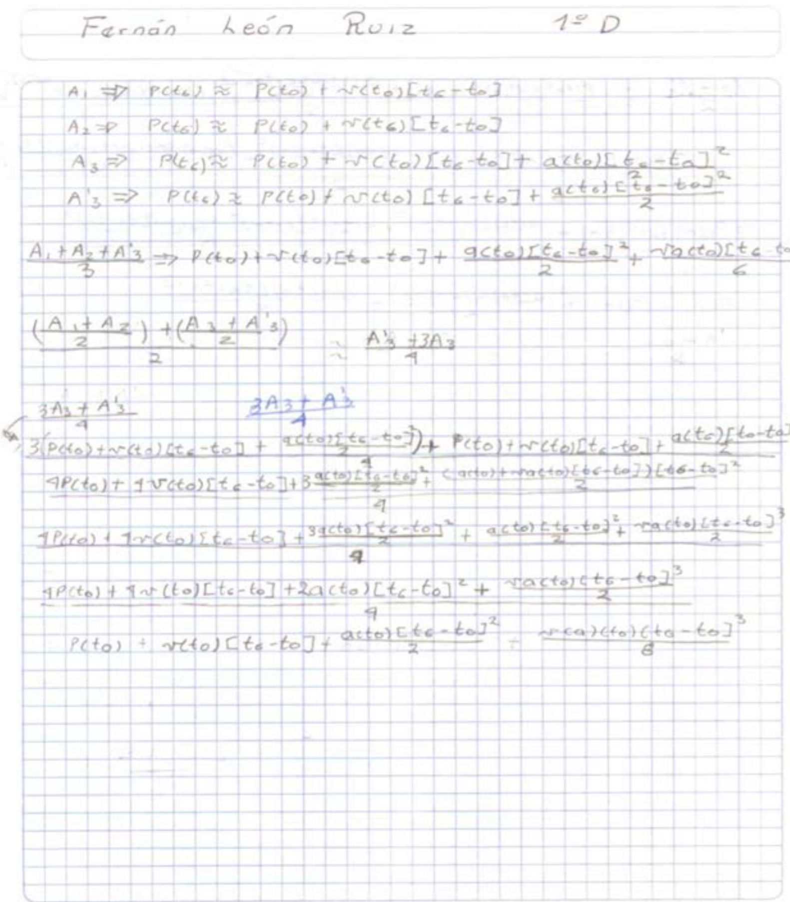
De acuerdo a las evidencias anteriores la *constantificación de lo variable* se constituye como una especie de práctica social (ya que es una pregunta que emerge para transformar la situación) detonada por la práctica social de predecir y ambas le dan sentido a la práctica social de acumular distancias.

La noción de *constantificación de lo variable* en tanto práctica social tiene coincidencias, en cierto modo, con la construcción de Galileo en el siglo XVII (lo cual no significa equivalencia), ver por ejemplo como construye un área del triángulo (modelo de movimiento con velocidad variable) y lo hace igual al área de un Rectángulo (modelo de movimiento con velocidad constante) en su Jornada Tercera (Galileo, 1638, citado en Cantoral, 2001, pp. 12-13):

Otro hallazgo de nuestro análisis consiste en evidenciar un tipo de mediación social que se ha mencionado en el inciso b) del apartado 5.1 de este capítulo, es decir, desentrañamos las propiedades del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico que no pueden ser “abstraídas” por la interacción entre los estudiantes y el objeto de conocimiento común, y en donde es imprescindible la mediación social.

Precisando, un descubrimiento de nuestra investigación cuando intentamos controlar la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico consiste en perfilar un rol del profesor que no se corresponde con la devolución ni con la institucionalización (Brousseau, 1994; Brousseau, 2000) sino con un tipo de intervención del profesor en el sentido de introducir propiedades que no pueden ser “abstraídas” por la interacción entre los estudiantes y el objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico, y en donde es imprescindible la mediación social (Muñoz, 2001), “[…] por ejemplo, cuando los estudiantes desarrollan la hoja de actividades No.3

el profesor introduce el análisis de la variación local de la variable independiente para poder predecir la evolución de la variable dependiente" (Muñoz, 2003). También en el mismo sentido el profesor introduce el análisis de los *promedios* (Muñoz, 2006) en la *constantificación de lo variable* previamente construida por los estudiantes con el fin de provocar la génesis de la serie de Taylor vista como un algoritmo que materializa a la *predicción*, por ejemplo, mostramos una parte de los apuntes de un estudiante:


Fernán León Ruiz 1º D

$A_1 \Rightarrow P(t_c) \approx P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0]$

$A_2 \Rightarrow P(t_c) \approx P(t_0) + v(t_c)[t_c - t_0]$

$A_3 \Rightarrow P(t_c) \approx P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2}$

$A'_3 \Rightarrow P(t_c) \approx P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_c)[t_c - t_0]^2}{2}$

$\frac{A_1 + A_2 + A'_3}{3} \Rightarrow P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2} + \frac{va(t_0)[t_c - t_0]^3}{6}$

$\frac{\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) + \left(\frac{A_3 + A'_3}{2}\right)}{2} \approx \frac{A'_3 + 3A_3}{4}$

$\frac{3A_3 + A'_3}{4}$ $\frac{3A_3 + A'_3}{4}$

$\frac{3\left[P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2}\right] + P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_c)[t_c - t_0]^2}{2}}{4}$

$\frac{4P(t_0) + 4v(t_0)[t_c - t_0] + 3\frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2} + \frac{(a(t_0) + va(t_0)[t_c - t_0])[t_c - t_0]^2}{2}}{4}$

$\frac{4P(t_0) + 4v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{3a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2} + \frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2} + \frac{va(t_0)[t_c - t_0]^3}{2}}{4}$

$\frac{4P(t_0) + 4v(t_0)[t_c - t_0] + 2a(t_0)[t_c - t_0]^2 + \frac{va(t_0)[t_c - t_0]^3}{2}}{4}$

$P(t_0) + v(t_0)[t_c - t_0] + \frac{a(t_0)[t_c - t_0]^2}{2} + \frac{v(a)(t_0)[t_c - t_0]^3}{8}$

$$\frac{A_3 + A_3'}{2} \Rightarrow \frac{P(t_0) + v(t_0)[t_6 - t_0] + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2}{2} + P(t_0) + v(t_0)[t_6 - t_0] + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2}{2}}{2}$$

$$\frac{2P(t_0) + 2v(t_0)[t_6 - t_0] + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2}{2} + \frac{(a(t_0) + va(t_0)[t_6 - t_0])[t_6 - t_0]^2}{2}}{2}$$

$$\frac{2P(t_0) + 2v(t_0) + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2}{2} + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2 + va(t_0)[t_6 - t_0]^3}{2}}{2}$$

$$P(t_0) + v(t_0) + \frac{a(t_0)[t_6 - t_0]^2}{2} + \frac{va(t_0)[t_6 - t_0]^3}{4}$$

5.3. Consideraciones finales

En el contexto de algunos hallazgos presentados, una perspectiva de investigación a seguir consiste en estudiar qué practica social está asociada a la necesidad de partir el intervalo de tiempo (es decir, de mirar localmente la variable independiente y la dependiente para luego reconstruir el todo, $F(t)$) o qué práctica social o prácticas están asociadas con un cálculo que no requiera de partir (es decir, que se mire el intervalo completo de la variable independiente para reconstruir globalmente la variable dependiente). En otras palabras, estudiar qué prácticas sociales están asociadas a la relación parte-todo y el papel que juegan los marcos epistémicos.

Una ruta de investigación (dado que el campo de prácticas sociales que presentamos es un punto de partida) será desentrañar el desarrollo de las prácticas sociales y la identificación de prácticas emergentes, por ejemplo, en el caso del procedimiento de derivación sucesiva estudiar el desarrollo de la *predicción* desde el Binomio de Newton hasta la serie de Taylor o en el caso del procedimiento de suma estudiar el desarrollo de la predicción desde el método de Euler hasta el método de Runge-Kutta y cómo se tejen ambos desarrollos.

Otra perspectiva de investigación a seguir consiste en estudiar cómo la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vive en dominios científicos distintos a los de la Cinemática (por ejemplo, Hidráulica, Economía, Bioquímica, Circuitos Eléctricos, Fisicoquímica, Administración, Termodinámica, Agronomía) a través de analizar los matices de la transposición de prácticas sociales de un dominio científico a otro en donde se requiere la matematización de la predicción.

También cuando se predice se construye el modelo F(t) y la discusión gira alrededor de las variables y sus variaciones (ver primeros incisos de las hojas de actividades); sin embargo, en un momento dado se necesitará desentrañar el papel de la noción de *simulación* en el sentido de analizar los parámetros de F(t), es decir, el análisis de $y(x)=AF(ax+b)+B$ (ver las hojas de actividades en sus últimos incisos apuntan en esa dirección) en donde la discusión gira sobre la organización de los comportamientos de y(x) a través de la variación de los parámetros (A, a, B y b). En breve, será necesario estudiar cómo se matiza la relación entre lo conceptual y lo algorítmico a través de la *predicción y simulación.*

En cuanto a los tipos de mediación social caracterizados en esta investigación será fructífero desentrañar los mecanismos que operan en los diferentes tipos de mediación social en una institución escolar específica de un contexto sociocultural específico, con el fin de que nos permita ir generando las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico del Cálculo integral. De hecho, pensamos que el estudio de los mecanismos de mediación social permitiría estudiar las relaciones entre la génesis histórica, la génesis contemporánea y la génesis didáctica.

CAPÍTULO 6

EDUCACIÓN EN CHIAPAS MEDIADA SOCIALMENTE POR ACTIVIDADES DE PREDICCIÓN MATEMÁTICA: HACIA UNA METODOLOGÍA INTERCULTURAL

Erivan Velasco Núñez

Introducción

El campo de la Matemática Educativa (ME) menciona una problemática para el aula de matemáticas que se percibe como una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Esta última se asume como un elemento que obstaculiza un aprendizaje significativo de las matemáticas. Entonces, se dice que la matemática escolar no es funcional. Algunos trabajos de nuestra disciplina, han reportado que la matemática escolar no trasciende al cotidiano del estudiante (Gómez, 2015), interpretándose que "[…] lo que se aprende en la escuela, se queda en la escuela" (Mendoza y Cordero, 2015, p. 1).

Es en este sentido que se considera que algo en el cotidiano de las personas es el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), el cual dentro de la teoría Socioepistemológica de la ME, se ocupa "[…] de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social." (Caballero, 2018, p.18).

Se considera que el pensamiento variacional es inherente en los individuos, el cual se puede desarrollar desde la infancia si se dan los elementos pertinentes para su génesis (Caballero 2018). Como estos individuos interactúan en un medio social para contextos determinados, se considera que a partir de esos medios se pueden construir fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos que aludan al cambio y a la variación. Lo cual permita una funcionalidad de un tópico matemático como lo es la pendiente de una recta y su interpretación como velocidad de crecimiento. En ese sentido, Peña-Rincón y Blanco-Álvarez (2015), nos dicen que:

> Estamos tan naturalizados con la idea de que la matemática es única y tiene carácter universal, que ni siquiera imaginamos la posibilidad de que existan otros conocimientos y prácticas matemáticas que amplíen y complementen las matemáticas difundidas por Occidente. Pero si analizamos las matemáticas desde un enfoque sociocultural, podemos apreciar que sí existen […] (p. 216).

Estos conocimientos de enseñanza y prácticas matemáticas basados en enfoques socioculturales, pueden introducirse al aula de matemáticas. En este sentido, López y Victoria (2015) nos dicen que "es necesario que los docentes propongan estrategias didácticas que den respuesta a los rasgos esenciales que caracterizan a cada cultura, esto con el fin de hacer de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas un pretexto formativo." (p. 53).

Sin embargo, al realizar un diseño, existen "[…]dificultades manifestadas en la interpretación lingüística, en los enunciados de los problemas, [que] influyen en el libre y rápido aprendizaje de los conceptos básicos de un tema determinado." (López y Victoria, 2015, p. 54).

Ante este panorama, se puede plantear la incorporación para la enseñanza de tópicos matemáticos en comunidades de pueblos originarios con actividades basadas o enriquecidas con aspectos culturales de las mismas comunidades como por ejemplo el crecimiento de plantas de cultivo. También se puede plantear el incorporar la predicción de estados futuros en el crecimiento de las plantas para propiciar una racionalidad del pensamiento y lenguaje variacional.

Se considera que pueden surgir argumentos, a partir de esta interacción, que sirvan para justificar el lenguaje y pensamiento variacional desde una perspectiva cultural para un tópico en específico dentro de las matemáticas, por ejemplo, la relación entre la pendiente de una recta con el significado de velocidad de la misma. Se piensa que estos argumentos emergerán en la comunidad estudiantil de pueblos originarios cuando interactúen con actividades didácticas construidas con aspectos culturales retomados de colaboradoras del nivel superior que provienen de la misma comunidad.

Para ello, se establece una estrategia metodológica de tres etapas. Para la primera etapa se han utilizado los aportes teóricos que corresponden a la reproducción cultural de Dietz obtenidos de colaboradores del nivel superior que pertenecen a pueblos originarios. En la segunda etapa se han incorporado elementos de la noción de predicción para propiciar una racionalidad del pensamiento y lenguaje variacional hacia la relación pendiente-velocidad de crecimiento. Una tercera etapa consistente en una puesta en escena, donde se espera surjan argumentos de corte cultural que complementen a dicha racionalidad.

Como parte de la primera etapa, una de las colaboradoras es tzeltal, cabe mencionar que el tzeltal en Chiapas, aunque es una lengua, tiene ciertas variantes territoriales. En ese sentido Polian (2018) nos comenta que:

> El tzeltal es un idioma con variación dialectal moderada: presenta indudables diferencias de un municipio a otro, por lo que está conformado por cierto número de lo que llamamos aquí 'geolectos' (para no decir 'dialecto', palabra de connotación negativa en el habla común), es decir, variedades con rasgos lingüísticos propios, vinculadas a determinadas áreas geográficas. (p. 4).

Con lo cual se considera relevante la participación de la colaboradora hablante de tzeltal, y de las otras tres colaboradoras, para realizar una amortización de los términos en español de la secuencia de actividades con su respectiva comunidad de origen.

6.1. Estrategia Metodológica

La estrategia metodológica consta de tres etapas. La primera etapa consiste en la incorporación de personas de pueblos originarios en la Facultad de

Ingeniería, Campus I (FI) de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH). De esta etapa se logró una muestra de cuatro mujeres que colaboraron en la investigación, dos hablantes y dos oyentes de lenguas originarias. En esta etapa se identificaron aspectos culturales en relación con la agricultura, objetivados y subjetivados (aspectos que se aclaran más adelante en este capítulo), a través de un cuento y entrevista.

La segunda etapa, consiste en el uso de los aspectos culturales identificados en la etapa anterior y se incorporan en el diseño de una secuencia de actividades. Se plantean actividades esperando que los estudiantes que interactúen con la secuencia aporten con respuestas relacionadas con sus costumbres y tradiciones en el cultivo de una planta, por ejemplo, el maíz. Como parte de las actividades se plantean las siguientes:

Actividad 1. Identificar el cambio en las alturas de una planta de maíz dado un patrón de crecimiento previo.

Actividad 2. Identificar las cuantificaciones de la forma (patrones de cambio) en el crecimiento de la planta de maíz.

Actividad 3. Comparación entre dos patrones distintos de crecimiento de la planta de maíz.

La tercera, una puesta en escena de la secuencia de actividades en las comunidades de origen de los colaboradores del nivel universitario, donde se espera se recuperen narrativas de la comunidad estudiantil del nivel básico de la localidad y analizar qué argumentos justifican la relación pendiente-velocidad de crecimiento desde su perspectiva cultural.

Sin embargo, antes de iniciar con las tres etapas metodológicas es pertinente realizar un análisis histórico del concepto de la función lineal. Sobre el concepto de función en diferentes culturas, podemos retomar parte de un análisis histórico de como este concepto ha sido abordado por los distintos grupos sociales. Sastre, Rey, y Boubée (2008) señalan que:

> Los babilonios tenían un manejo algebraico muy desarrollado, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables, y hasta el uso de la ley exponencial. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado, e incluso reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluidos, a las de segundo grado.

Tablilla con motivos geométricos (DivulgaMat)

Tablilla Plimpton con las ternas pitagóricas(DivulgaMat)

> Si bien los babilonios no manejaban aún el concepto de función, la noción de este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, ya que estas reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como, por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol. (pp. 142-143).

Otro aporte que retoma los inicios de la noción de función en los babilónicos es el de Ugalde (2013), este autor nos comenta:

> La versión más rudimentaria del concepto de función es, sin lugar a duda, el concepto de dependencia entre cantidades. Como tal, está presente en tablas de arcilla de los babilonios y en papiros de los egipcios. Los babilonios escribieron múltiples tablas de cálculo. Dos de ellas datan de 2000 A.C. y dan los cuadrados de los números del 1 al 59, y los cubos de los números del 1 al 32. Los babilonios conocían las relaciones:
>
> $$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \quad \text{y} \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},$$
>
> con lo cual, la tabla de cuadrados era suficiente para calcular cualquier producto. Un dato interesante de tomar en cuenta es como estas tablas se presentan en forma de columnas, como un anticipo a través de la historia, de las tablas que hoy en día se utilizan en los primeros niveles de enseñanza para representar funciones de variable discreta real $y = f(x)$. Además, se sabe que complementaban sus tablas por medio de aritmética, usando interpolaciones y extrapolaciones de datos. (p. 5)

Posterior a los babilonios, se encuentran rastros del concepto de función en los griegos, Sastre, Rey y Boubée (2008) señalan que

> Los griegos trataron con problemas que tenían implícita la noción de *función*, pero no fueron capaces de reconocerla y, menos aún, de simbolizarla. Sin embargo, ellos calcularon áreas, volúmenes, longitudes y centros de gravedad y desarrollaron tablas de acordes y tablas de senos similares a las actuales. A principios del siglo II A.C., los astró-

> nomos griegos adoptaron el sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y, casi al mismo tiempo, compilaron tablas de cuerdas de un círculo. Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado incremento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la Trigonometría. Pero todos estos desarrollos de los griegos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o mediante ejemplos. A modo de síntesis, puede decirse que estos estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, si bien no respondían explícitamente al concepto de *función*, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura helénica. (p. 143).

Continúan estos mismos autores, con análisis del concepto de función en la Edad Media, ellos señalan que:

> Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así, la evolución de la noción de *función* se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban las fórmulas.
>
> El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desa-

> rrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas. En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó *longitud y latitud* a los antepasados de lo que hoy llamamos *abscisa y ordenada*. (Sastre, *et al,* 2008, p.144).

Finalmente, Ugalde (2013), nos dice que

> El mayor auge del concepto de función se dio durante los siglos XVI, XVII y XVIII con el desarrollo de los números reales y el análisis matemático. El concepto de función se consolida del siglo XIX a la primera parte del siglo XX, cuando este concepto juega un papel central en la gran mayoría de las áreas del que hacer matemático. (p. 4).

Sin embargo, el concepto de la función lineal fue desarrollado para resolver problemas donde el quehacer matemático tenía competencia. Actualmente la función lineal ha sido trasladada a la escuela, institución que se encarga de reproducir el conocimiento que se ha configurado históricamente. Sin embargo, estamos convencidos que este concepto puede tomar rasgos culturales, para configurarse como un recurso educativo, donde este conocimiento sea pertinente, significativo y funcional, lo cual lo estamos pensando como las dos vías que menciona Ávila (2014), al diseñar actividades para lo didáctico-pedagógico con saberes propios de la comunidad.

> […] puedo afirmar que es de la dinámica vigente, de la organización actual de la cultura y el sistema productivo, del que derivan y en el cual están inmersos ciertos conocimientos matemáticos y actividades matematizables que posibilitarían el vínculo escuela-cultura local como

recurso educativo. Esta vinculación, en mi opinión, ha de considerarse en dos vías:

a) la didáctico-pedagógica, que permitiría pensar y construir las situaciones y estrategias útiles para que los alumnos logren un conocimiento matemático pertinente, significativo y funcional;

b) la trasmisión de un saber propio de la comunidad étnica a la que pertenecen los alumnos, con el fin de fortalecer su identidad. (p. 45).

A continuación, se mencionan las etapas metodológicas.

6.1.1. Primera etapa metodológica

Para una propuesta que trata de incorporar aspectos culturales y el lenguaje y pensamiento variacional, para favorecer el aprendizaje de la relación entre la pendiente y su significado como velocidad de crecimiento. Se parte de la premisa que la cultura de una comunidad de pueblos originarios no cambia del todo, quizás incorpora algunos aspectos en su interrelación contras culturas. Sin embargo, existe una misma identidad como grupo, tal y como lo comenta Dietz (2017)

> [...] los miembros de un grupo étnico especifico [...] no reinventan su cultura a diario, ni cambian constantemente su identidad de grupo. La reproducción cultural, tanto de manera intra- como intergeneracional, suscita —mediante la praxis cotidiana— procesos de lo que Giddens (1995) acuñó como “rutinización”, la cual, a su vez, estructura dicha praxis. (p. 198).

A partir de esta rutinización, según Dietz (2017), los individuos gestionan su continuidad, tanto en aspectos culturales objetivados tales como instituciones, rituales y significados preestablecidos, y en aspectos culturales subjetivados como las prácticas y representaciones por parte de los miembros al grupo étnico al que pertenece. Para el caso de una comunidad de pueblos originarios para la primera etapa metodológica consistiría en el desglose siguiente (fig. 1).

Figura 1. Desglose de aspectos culturales para la agricultura del maíz de una comunidad de pueblos originarios.

Culturales Objetivados			Culturales subjetivados	
Instituciones	Ritual	Significados	Prácticas	Representaciones
Instituciones comunitarias que intervengan en la agricultura	Ritual a alguna deidad, del cielo, de la tierra o del agua	Significados que se relacionan con la agricultura	Prácticas subjetivas asociadas a la agricultura	Representaciones sociales asociadas al cultivo de plantas

Fuente: Velasco *et al.* (2021).

Se considera que uno de los culturales puede ser utilizado para la construcción de actividades didácticas para el pensamiento y lenguaje variacional en la relación pendiente-velocidad de crecimiento. Por ejemplo, el aspecto de cultural subjetivado de prácticas. Una práctica es cultivar la planta con respecto al ciclo lunar de luna llena o de luna nueva. Pero para conocer las prácticas en una comunidad, se puede recurrir a un cuento o una entrevista, e identificarlas en su narrativa.

También en esta primera etapa metodológica se realizó un muestreo en la FI de la UNACH para saber que estudiantes provienen de comunidades de pueblos originarios y cuatro estudiantes resultaron con ese hecho. Fueron invitadas y decidieron colaborar en esta investigación, la tabla 1 resume la comunidad de procedencia y la lengua que conoce. Se interpreta a la FI como un lugar de convergencia de estudiantes provenientes de regiones diversas del estado de Chiapas entre las cuales están las perteneciente a pueblos originarios.

Las cuatro colaboradoras actualmente cursan el noveno y décimo semestre de la IC. Las colaboradoras participan activamente en la investigación, ya que armonizarán términos entre el español y la lengua originaria a la cual pertenecen. También aportan aspectos culturales, tanto objetivados como subjetivados, para ser usados en el diseño de la secuencia de actividades para su comunidad de origen.

Tabla I. Procedencia de los colaboradores en la investigación

Colaborador	Hablante de lengua originaria	Comunidad de origen del estudiante
1	Tzeltal	Nuevo Monte Líbano, municipio de Ocosingo
2	Zoque	Ocotepec, municipio de Ocotepec
Colaborador	Escuchante de lengua originaria	Comunidad de origen del estudiante
3	Zoque	Tecpatán, municipio de Tecpatán
4	Ch'ol	El Limar, municipio de Tila

Fuente: Velasco, *et al.* (20221).

Las estudiantes del nivel superior construyeron una narrativa, es decir, un cuento.Para el caso de la colaboradora tzeltal se presenta en la figura 2. En ese cuento, las estudiantes del nivel superior, externan la temporalidad en que se cultiva una planta, y como esa temporalidad está relacionada con la fase lunar. A raíz de ese cuento se identificó el tipo de planta y la fase lunar cuando se realiza la siembra en la comunidad de origen de cada colaboradora.

Figura 2. Cuento de Xin Guzmán.

Cuento de Xin Guzmán.

Cuento de Xin Guzmán en español

En un pequeño pueblito de la selva lacandona, había un niño llamado manu, el niño amaba a su pueblito y él decía que nunca lo cambiaría por nada. El niño le encantaba la naturaleza y el paisaje que su pueblo poseía. Cada tarde Manu se iba a sentar en una lomita, admirando y presenciando la puesta de sol, y en ese mismo lugar se quedaba observando los árboles, plantas y cosechas. A Manu le encantaban los elotes, y un día él le pregunto a su abuelo Pedro.

- Abuelo, ¿Cómo se siembra el maíz?, dijo Manu
- Hijito, antes que nada, el grano de maíz debe ser seleccionado, ya que al momento de sembrar no puede haber granos picados, ni podridos. Sino que estos granos deben estar en perfecto estado.
- Otra cosa muy importante es el lugar donde será la siembra, de preferencia es recomendable sembrar en un cerrito o lomita, ya que por factores climatológicos éste (el lugar), se puede inundar y echar a perder si es un lugar plano, en algunos casos. El área donde será la siembra debe estar limpia, sin ninguna planta que vaya a intervenir en el crecimiento de la cosecha. Una vez ya llegado el tiempo para la siembra, los granos de maíz deben estar fumigados por una pequeña porción de Diesel y esto se debe para evitar plagas. Una vez ya listo el terreno y los granos de maíz se prosigue en la siembra. Para sembrar el maíz se tiene que hacer un orifico de unos siete o diez centímetros(cm) de profundidad y meter cuatro o cinco granos de maíz en cada orificio, y así sucesivamente hasta terminar de sembrarlas todas, en una distancia de 70-90 cm cada una.
- Otro dato que jamás se te debe de olvidar es que se puede hacer dos cosechas de maíz al año. Uno en abril-mayo que se le denomina siembra normal; la segunda es en octubre-noviembre que se le llama Tornalipa. Se eligen estas fechas porque son tiempos de lluvia. Y esto favorece el crecimiento de las cosechas.
- Regresando a lo anterior, ya una vez sembrados los granos de maíz, lo único que procede sería esperar a que crezcan y limpiar constantemente el terreno de siembra para que crezcan uniformemente y tomen ese color verdecito.
- ¿Y ustedes no toman en cuenta las fases de la luna para cuando siembran?, pregunta manu.
- Hay algunos agricultores que se basan a través de las fases lunares sobre el rendimiento del maíz. Los agricultores siembran en la luna nueva, esto se debe a que los rayos lunares entran a través del suelo del suelo. De ahí su influencia y crecimiento.
- ¿Cómo saben que va en correcto crecimiento la cosecha? Pregunta nuevamente Manu.
- Pues tornan el color verde en sus hojas, y ya como parte final, éste se pone amarillo las hojas y se secan, y es ese momento en que se doblan todas las hojas de las mazorcas para luego llevarlas a la casa para el consumo o ya sea para comercializarla.
- Wow, abuelito, ¡que padre!, a mí me gustaría aprender a sembrar maíz algún día
- Claro que sí, hijito, ya aprenderás.

Después Manu le da un abrazo bien fuerte a su abuelito.

FIN

Fuente: Velasco *et al.* (2021).

Al realizar un análisis del cuento con los criterios mencionados en la figura 1, se identifica al maíz como la planta que se utilizará en una secuencia de actividades. La luna nueva se marca como el inicio de la siembra y se interpreta como una condición inicial. Un resumen de los aspectos culturales, tanto objetivados como subjetivados, que emergen del análisis del cuento se describen en la figura 3.

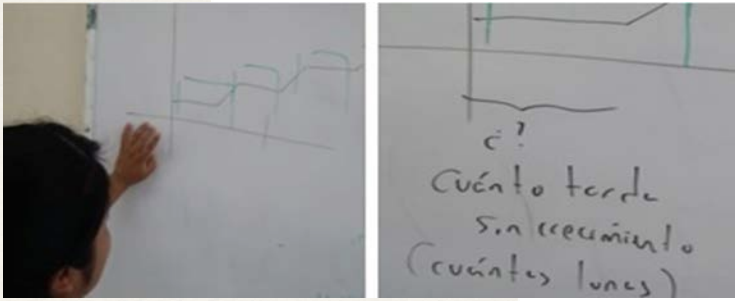
Figura 3. Aspectos culturales objetivados y subjetivados que emergen del cuento de la colaboradora tzeltal.

Culturales Objetivados			Culturales subjetivados	
Instituciones	Ritual	Significados	Prácticas	Representaciones
Familia de la comunidad de origen. ***Manu le pregunta a su abuelito Pedro***	La montaña, como una representación de la tierra, sigue siendo para los tzeltales un símbolo de la fertilidad. (D'Alessandro y González, 2017, p.282) ***Sembrar cerca de un cerrito o lomita.***	Significado sobre el Efecto lunar sobre el crecimiento del maíz. ***Esto se debe a que los rayos lunares entran a través del suelo. De ahí su influencia y crecimiento.***	Practicas transmitidas de una generación a otra y asociadas al cultivo del maíz. ***Limpieza del terreno.*** ***Los granos de maíz fumigados con Diesel.***	El género masculino asociado al cultivo del maíz. **Manu (un niño), le pregunta a su abuelito Pedro (Hombre)**

Fuente: Velasco *et al.* (2021).

En continuidad a la colaboración del cuento, se realiza una entrevista con la colaboradora de la comunidad tzeltal, con la intención de comprender que aspectos culturales pueden emerger de su entrevista. En este sentido, ella realizó ademanes para el crecimiento de una planta de maíz con respecto a la variación de las fases lunares. Esto se interpreta como un comportamiento para el crecimiento de la planta. Había lapsus donde la planta dejaba de crecer y fases posteriores a las sin crecimiento con un crecimiento para la planta. Esto, se tradujo en la construcción de la gráfica mostrada en la figura 4

Figura 4. Construcción de una gráfica del comportamiento del crecimiento de una planta.



Fuente: Velasco *et al.* (2021).

Al finalizar esta etapa metodológica se pretende tener identificados los aspectos culturales, tanto objetivados como subjetivados por parte de los estudiantes del nivel superior que sean llamados a colaborar de la FI de la UNACH. Se considera retomar parte de ellos para el diseño de una secuencia de actividades.

6.1.2. Segunda etapa metodológica

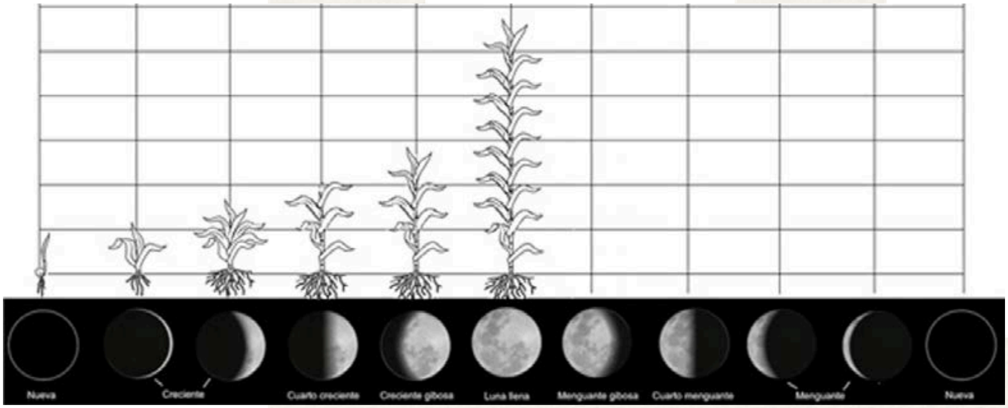
Actividad 1. Identificar el cambio en las alturas de una planta de maíz dado un patrón de crecimiento previo

Análisis *a priori* actividad 1

Se muestra el crecimiento de la planta de maíz con relación a las fases lunares. Y al final una planta de maíz con una altura mucho mayor. Se espera que digan que esa planta no corresponda al crecimiento dado por la secuencia de crecimiento de un cuadrito para el eje "y" por cada fase lunar en el eje "x". Esto representa un reconocimiento cuantitativo del cambio.

Al comienzo de la actividad de aprendizaje se le solicitó al estudiante estimar la altura de la planta de maíz en luna nueva, y si corresponde a la altura de la imagen, ver figura 5.

Figura 5. Comparación del crecimiento de una planta de una fase lunar a otra.



Fuente: Velasco *et al.* (2021).

Análisis a posteriori actividad 1

Conocimiento Matemático: ¿Cómo la medida del cambio en el *eje Y* se modifica de un valor del *eje X* a otro?

Transmisión del saber: Se pretende que los estudiantes observen la imagen y noten como la planta crece en forma ascendente y establezcan un patrón de crecimiento. Puede ocurrir que indiquen que la planta crece medio cuadrito en el eje "y" por cada fase lunar. Entonces la altura de la luna nueva correspondería a cuatro cuadritos. De tal manera, que identifiquen que el crecimiento de la última planta no corresponde con el patrón de crecimiento. Puede haber personas que digan que sí corresponda ese crecimiento y pueden aludirlo a condiciones del clima, temperatura o lluvias, o por el tipo de suelo donde se había realizado la siembra. Una muestra del conocimiento empírico de la siembra del maíz.

En la actividad siguiente se le pidió nuevamente al estudiante que predijeran la altura de la planta de maíz, pero en la tercera luna nueva.

Actividad 2. Identificar las cuantificaciones de la forma (patrones de cambio) en el crecimiento de la planta de maíz

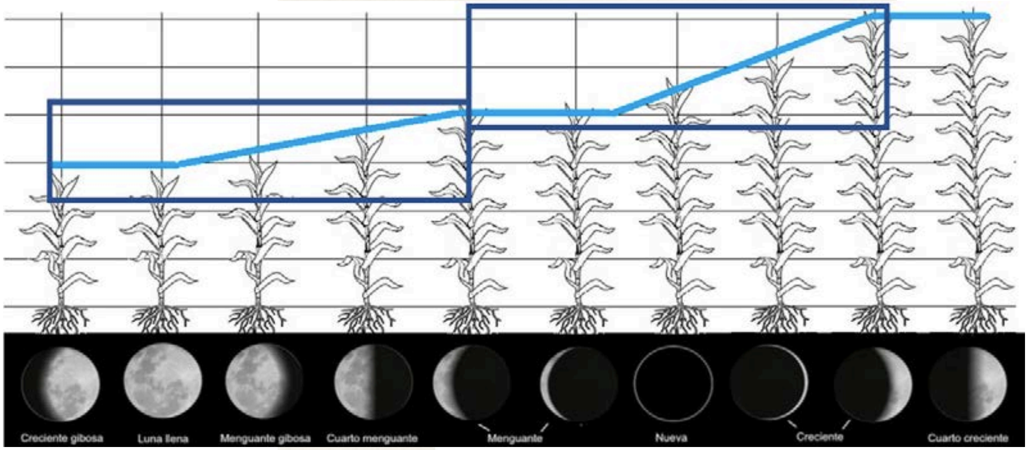
Análisis *a priori* actividad 2

Se le pide al estudiante que prediga la altura de la planta de maíz, pero en la tercera luna nueva. Se espera que el estudiante identifique el patrón de crecimiento a través de una serie repetida de fases lunares, es decir, la forma en que se comporta el crecimiento del maíz. Esto representa que las cuantificaciones de la forma en cómo la medida del cambio en el *eje Y* se modifica en los cambios del *eje X.*

Dentro de sus repuestas más populares nos comentaron los estudiantes que no habría una tercera luna, porque la planta de maíz solo tarda de tres a cuatro meses en dar fruto y morir. Por tanto, para la tercera luna nueva la planta se encontraría marchita o muerta.

En esta etapa de la actividad los estudiantes no lograron identificar la altura por medio de cuadritos, ya que ellos cuentan con el conocimiento empírico del campo y respondieron con base en ello.

Figura 6. Comparación del crecimiento de una planta entre periodos de fase lunar a otra.



Fuente: Velasco *et al.* (2021).

Análisis a posteriori actividad 2

Conocimiento Matemático: ¿Cómo la medida del cambio en el *eje Y* se modifica en los cambios del *eje X*?

Transmisión del saber: Que los estudiantes logren determinar la altura contando cuántos cuadritos crece la planta fase con fase, la planta a la tercera luna nueva mediría 11 cuadritos de altura. O podrían ajustar todo el crecimiento del maíz hasta la segunda luna nueva como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, e indicar que la planta de maíz hasta esa altura llegaría y que ya no crecería más. También pueden responder que para esa tercera luna la planta sería más alta ya con mazorca. Puede ser que emerja en los estudiantes el conocimiento que tienen relacionado al cultivo de la planta de maíz y mencionen que acorde a lo mostrado la planta ya no crecería más o que ya se murió. Se espera obtener cuantificaciones de la forma en cómo la medida del cambio en el *eje Y* se modifica con los cambios del *eje X.*

Actividad 3. Comparación entre dos patrones distintos de crecimiento de la planta de maíz

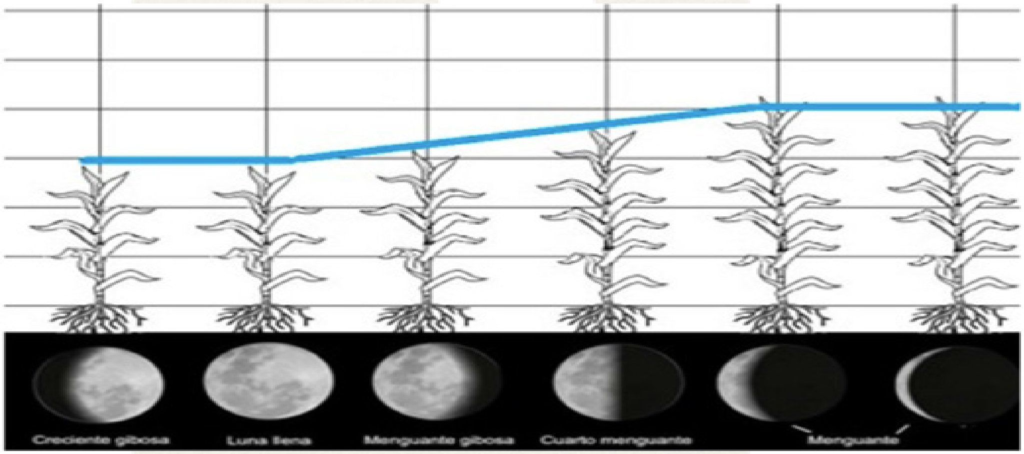
Análisis a priori actividad 3

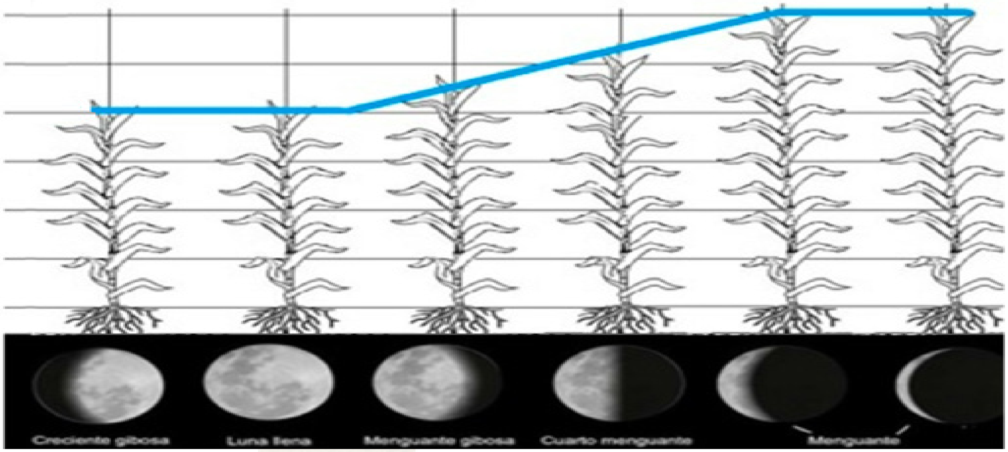
Se espera que la comunidad estudiantil visualice por qué el crecimiento de la recta cambia en la forma en que lo hace y de una explicación en ese sentido.

Se espera que los estudiantes al ver las imágenes relacionen la línea recta de diferentes pendientes entre los dos estados sin crecimiento de la figura 7 y esto lo asocian con la velocidad de crecimiento de la planta de maíz.

Se le solicita al estudiante que describa lo que observa de las dos imágenes que aluden a dos crecimientos distintos de la planta de maíz en el mismo periodo de fase lunar.

Figura 7. Comparación del crecimiento de dos plantas entre el mismo periodo de fase lunar.





Fuente: Elaboración propia.

Análisis a posteriori actividad 3

Conocimiento Matemático: ¿Por qué el crecimiento de la recta cambia en la forma en que lo hace?

Transmisión del saber: Que el estudiante pueda relacionar la pendiente de la recta con la velocidad de crecimiento al ver la comparación de dos rectas a distinta pendiente (aunque estas pueden ser que no sean explicitas). Puede ocurrir que señalen que mientras en una línea recta existía un crecimiento lento, en la otra existía un crecimiento rápido y esto se deba a que la tierra es abundante, al aumento de la cantidad de lluvia o que una planta se le ha colocado fertilizante y a la otra no. Aunque pueden existir estudiantes que atribuyan la diferencia de pendientes a que las plantas habían sido sembradas en tiempos distintos y por ende tenían distinto crecimiento.

6.1.3. Puesta en escena

Se plantea que las puestas en escena sean en las comunidades de origen de los estudiantes del nivel superior. Ya que es a través de ellos que se hace un primer acercamiento hacia la comunidad de pueblos originarios del estado de Chiapas. Se puede repetir la primera parte metodológica con los estudiantes del nivel medio superior o secundaria. Según el nivel educativo donde se plantee aplicar. Para fortalecer el aprendizaje de algún tópico matemático. Como el aquí mostrado consistente en la relación pendiente-velocidad de crecimiento.

6.2. Consideraciones finales

Se considera que diseñar este tipo de actividades de aprendizaje podría ayudar a los docentes que trabajan en comunidades rurales o pertenecientes a alguna localidad de pueblos originarios a que sus estudiantes comprendan los tópicos matemáticos que están contenidos en los planes y programas de estudio. Porque los objetos matemáticos, que están en los libros de texto no consideran los contextos sociales y culturales, y en su mayoría todos estos libros abordan el mismo contenido por lo cual no permiten ampliar la constitución del conocimiento matemático. Esta propuesta metodológica pretende que los docentes incorporen elementos dentro de su mismo entorno cultural cuando aborda objetos matemáticos lo cual, se considera, hace más interesante para el estudiante los contenidos observados en el aula de matemáticas, en contraste con el manejado en los libros de texto que sugieren los planes o programas de estudios de los diferentes niveles educativos.

Se considera que la propuesta de diseñar una actividad de aprendizaje dirigida a alumnos de bachillerato pertenecientes a la comunidad de pueblos originarios como una aproximación al estudio de algún objeto didáctico dentro de la matemática escolar puede ser positivo ya que los estudiantes podrán aportar con el conocimiento empírico y de tradicional de su comunidad en contraste a la forma pasiva de ser receptores de una definición que se le proporciona del libro de texto.

Se espera que esta propuesta puede servir como una herramienta que brinda al docente un panorama más extenso de producir sus estrategias y poder adaptarlas a las situaciones a las que se encuentra dentro de su comunidad y así poder presentar su objeto matemático más atractivo al estudiante y provocar mayor interés en los alumnos en aprender matemáticas.

Las fortalezas que tiene este trabajo es la de evidenciar que no hay un puente entre la parte tradicional y de costumbres de la comunidad con la parte hegemónica de los contenidos que existen en los libros utilizados por los subsistemas educativos del estado de Chiapas.

Por ende, con una mirada a largo plazo, con más actividades de aprendizaje como la mostradas en este capítulo y en los anteriores, permitiría una propuesta de incorporación en los materiales con los que trabajan una comunidad de docentes con los estudiantes.

EPÍLOGO

Este libro reúne características esenciales para dar una visión integradora de las Matemáticas, teniendo como principal objetivo, incorporar elementos que no se usan en la enseñanza de las matemáticas y por lo tanto son desconocidos en la educación tradicional. Es por eso, que el estilo del escrito tiene algunas características en común en cada capítulo, con el fin, primero de conocer la génesis histórica que dieron origen a conceptos matemáticos, y después ponerlos en práctica para luego compartir sus resultados.

En el libro se exploran prácticas de contar, medir, calcular y predecir, a la vez de dar un acompañamiento de cómo se asocian al desarrollo en la historia de sociedades de distintas culturas, que nos llevan al número, al origen histórico del algebra, a la variación y al cálculo infinitesimal, también explora estos esbozos prácticos en los contenidos educativos, asociaciones a otras disciplinas, como puede ser la física, la electricidad y la electrónica, incluso mediadas por la tecnología, se propone un diseño de una actividad mediadora para cada capítulo y poder usar estas prácticas milenarias. Por último, se muestran resultados de algunas puestas en escena para contrastar y el lector pueda tener elementos a priori para su práctica educativa.

Este documento resulta importante por distintos motivos que se entrelazan unos con otros, y nos hace entender la importancia y significado del porqué es vital conocerlos, por ejemplo, las prácticas que se desarrollaron para realizar actividades cuantitativas y para darles carácter cualitativo, esto al entender los usos sociales de las prácticas, que generaban el conocimiento, que van desde hacer marcas, desarrollar escritura, elaborar los símbolos, llevar registros, hasta las necesidades que gracias a estas se resolvían, que a la vez, dan cuenta de la utilidad y nos dan el contexto para saber el beneficio y la necesidad de desarrollar actividades matemáticas para el progreso social.

Es por eso que se ha complementado cada capítulo con actividades que se pueden poner en juego en diferentes entornos educativos y así experimentar cómo se construye el conocimiento matemático.

También los resultados de estas actividades como evidencia empírica, sirven de guía y de hilo conductor de cómo se pueden generar nociones, mecanismos y estructuras diferentes a las actividades escolares tradicionales. Por lo que, resulta adecuado tomar en cuenta este contraste para elaborar este texto con una visión integradora y llevar al lector a que pueda tener un enfoque crítico y creativo en su visión por entender y descubrir las matemáticas.

Emiliano Núñez Constantino

Marzo de 2023

Chiapas, México.

REFERENCIAS

Alanís, J. A. (1996). *La Predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Albendea, P. (2011). *La historia del álgebra en las aulas de secundaria.* Facultad de la Universidad de Cantabria.

Alberich, A. (2000). *Las matemáticas en el antiguo Egipto*. CienciaNet. http://ciencianet.com/mategipto.html

Alsina, A. P. (2007). ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 10(3), 315-333.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 17 (1), 418-422.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. (selected papers), 41-66.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, Moreno, L. y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 34-59). Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). L´evolution des Problematiques en Didactique de l´Analyse. Recherches en Didactique des Mathematiques, *18*(2). https://revue-rdm.com/1998/l-evolution-des-problematiques-en/

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 1-32). American Mathematical Society.

Ávila, A. (2014). La Etnomatemáticas en la educación indígena: Así se concibe, así se pone en práctica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática.* 7(1), 19-49.

Ávila, A. (2018). Lenguas indígenas y enseñanza de las matemáticas: la importancia de armonizar los términos. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 177-195.

Bachelard, G. (1993). *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI.

Bajtín, M., & Vigotsky, L. (1993). *La organización semiótica de la consciencia.* Editorial Anthropos.

Balda, P. (2018). Una epistemología de usos en torno a lo proporcional: Un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar [Tesis de doctorado no publicado]. Universidad Santo Tomás.

Barbin, E. y Douady, R. (eds.). (1996). Enseñanza de las matemáticas: *Relación entre saberes, programas y prácticas.* Topiques éditions.

Barragán, A., Núñez, H., Cerpa, G., y Rodríguez, M. (2014). *Introducción al electromagnetismo: un enfoque constructivista basado en competencias.* Patria.

Berciano, A. (s.f.). *Matemáticas en el Antiguo Egipto.* Scribd. https://es.scribd.com/doc/182953867/Matematicas-Egipto-BercianoBernal

Biro, S. (2009). *La mirada de Galileo.* Fondo de Cultura Económica.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Paidós.

Boylestad, R. (2011). *Introducción al análisis de circuitos.* Pearson.

Braun, E. (2003). *Electromagnetismo: de la ciencia a la tecnología.* Fondo de Cultura Económica.

Brousseou G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física.* Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. *Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Paidós Educador.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12*(1), 5-38.

Bunge, M. (2002). *La ciencia, su método y su filosofía.* Grupo Patria Cultural.

Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Anidación de prácticas para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa,* 2, 402-413.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista Educación Matemática. 18*(1), 133-160.

Cano, J., Gómez, J., y Cely, I. (2009). *La enseñanza del concepto de corriente eléctrica desde un enfoque histórico epistemológico* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad de Antioquía.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *MATHESIS, XI*(1), 55–101.

Cantoral, R. (1994). Los textos de Cálculo: una visión de las reformas y contrareformas. En T. Cordero, M. Murillo y T. Peralta. (eds.), *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp.11-20). EUNED.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa: *Un estudio de la formación social de la Analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(1), 1-9.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* Secretaría de Educación Media Superior.

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. e Imaz, C. (1990). Cálculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. En R. Cantoral y R. Farfán (Eds), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa* (pp. 55-69). Universidad Autónoma del Estado de México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo.* Thomson.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación, algunos ejemplos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Número especial,* 83-102.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. [Tesis de doctorado no publicado]. Cicata-IPN,

Carrillo, F. (2003). Álgebra India. *Apuntes de la historia de las matemáticas, 2*(1), 5-10.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* Colección Mathema. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE.

Chevallard, Y. (1998). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. En C. Gilman, (trad.). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE.

Chevallard, Y., Bosch, M y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE-Horsori.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Biblioteca del Normalista de la SEP.

Constantino, E. (2018). Sociogénesis, deconstrucción y rediseño de la matemática asociada a prácticas milenarias: contar, medir y calcular [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Cordero, F. (1992). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. En R. Cantoral, C. Imaz y R.M. Farfán (Eds), *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investiga-*

ción en Matemática Educativa (pp. 267-296). Universidad Autónoma del estado de Morelos.

Cordero, F. (1993). *La integral como un modelo de la noción de acumulación. Lecciones de Cálculo para docentes de ingeniería. Vol. 4*. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar.* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (1998). Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática. En Antologías No. 3, del programa editorial del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame, 16*(1), 73-78.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8*(3), 265-285.

Collette, J. (1986). *Historia de las matemáticas I.* Siglo XXI editores.

Cruse, A., y Lehman, M. (1982). *Lecciones de cálculo: volumen I.* Fondo Educativo Interamericano.

D'Alessandro, R. y González, A. A. (2017). La práctica de la milpa, el ch'ulel y el maíz como elementos articuladores de la cosmovisión sobre la naturaleza entre los tzeltales de Tenejapa en los Altos de Chiapas. *Estudios de cultura maya, 50*(), 271-297. https://doi.org/10.19130/iifl.ecm.2017.50.768

D´Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática 12*(1). Grupo Editorial Iberoamérica.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Reverté.

De Faria, E. (2006). *Ingeniería Didáctica. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática.* 1(2), 1-9.

Demeneghi, M.A. (2019). Elementos históricos y didácticos para la introducción del álgebra en la educación básica [Tesina de especialidad no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Díaz, J. y Bermejo, V. (2007) Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 10(3), 335-364.

Dietz, G. (2017). Interculturalidad: una aproximación antropológica. *Perfiles educativos, 39* (156), 192-207.

Delval, J. (1998). *El desarrollo humano*. Siglo XXI Editores.

Dolores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4-II), 241–254.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 61-96). Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. En P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). University Press.

Duarte, J. (2011). El mundo físico de Aristóteles. *GÓNDOLA, 6*(1), 62–70.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 47-70.

Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1990). *Constructing Calculus Concepts: cooperation in a computer laboratory.* MMA Notes Series.

EcuRed (2016, 8 de junio). *Leyes de Kirchhoff.* https://www.ecured.cu/index.php?Title= Leyes_de_Kirchhoff&oldid=2660780

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav-IPN.

Euler, L. (1993). Método de Máximos y Mínimos. Traducción de Albert Dou. Universitat Autónoma de Bacelona y Universitat Politécnica de Catalunya.

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería (estudio de caso).* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Ferreiro, E. y Teberosky, A. (1995). *Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño.* Siglo XXI Editores.

Foro histórico de telecomunicaciones. (2024). *Kirchhoff, Gustav Robert.* Recuperado de https://forohistorico.coit.es/index.php/personajes/personajes-internacionales/item/kirchhoff-gustav-robert

Fraile, J. (2012). *Circuitos eléctricos.* Pearson.

Galilei, G., (1984). *El ensayador.* Sarpe.

Galileo, G. (2002). *Diálogo de los dos máximos sistemas*. RBA Coleccionables.

Galileo, G. (1981). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Editora Nacional.

García, R. (1996). Jean Piaget: epistemólogo y filósofo de la ciencia. *Boletín de la Academia de la Investigación Científica,* (28), 5-9.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Piaget a la teoría de sistemas complejos.* Editorial Gedisa.

García, J., y Dolores, C. (2016). Conexiones matemáticas entre la derivada y la integral: una revisión de libros de texto de bachillerato. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(1), 325–333.

Gávilan. P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la Escuela*, (73), 95-108.

Geoenciclopedia. (2019). Fases de la Luna. Recuperado en 17 de febrero de 2020, de *https://www.geoenciclopedia.com/fases-de-la-luna/*

Godino, J. (2002). *Matemáticas y Didáctica para maestros (Manual para estudiantes). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada.

Godino, J.D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante.* ReproDigital.

Godino. J.D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lascana, E. y Wilhelmi, M.R. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*. Universidad de Granada; Universidad de Jaén; Universidad Pública de Navarra.

Goldmann, L. (1998). *Introducción a la filosofía de Kant: hombre, comunidad y mundo*. Amorrortu editores.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma.* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine,* 56(4), 195–206.

Grattan-Guinness, (1980). *The Development of the Foundation of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. Cambridge.* MIT Press.

Guedj, D. (2011). *El imperio de los números.* Ed. Blume.

Hawking, S. (2010). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Editorial Crítica.

Hawking, S. (2011). *Historia del tiempo: del Big Bang a los Agujeros Negros.* Alianza Editorial.

Heath, T. L. (1953). *The works of Archimedes.* Dover Publications (reprint of 1897 ed.).

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor.* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas.

Hinojos, J., y Farfán, R. (2018). La analogía entre el calor y la electricidad. Una base para confrontar el obstáculo epistemológico sustancialista en la electricidad en escuelas de ingeniería. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 584-591.

Holton, D. (Ed.). (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

Ímaz, C. (1987). *¿Qué es la matemática educativa?. En E. Bonilla, O. Figueras y F. Hitt. (Eds.). Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 267-272). Universidad Autónoma de Yucatán.

Ímaz, C., y Moreno, L. (2014). *Cálculo: su evolución y enseñanza.* Trillas.

Kant, I. (1996). *Crítica de la razón pura.* Colofón.

Kline, M. (2000). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI Editores.

Koyré, A. (2001). *Estudios Galileanos.* Siglo XXI Editores.

Koyré, A. (1980). *Estudios de historia del pensamiento científico.* Siglo XXI Editores.

Koyré, A. (1980). *Estudios galileanos.* Siglo XXI Editores.

Kuhn, T. (1982). *La estructura de las revoluciones científicas.* Fondo de Cultura Económica.

Lenkersdorf, C. (2002). *Tojolabal para principiantes. Lengua y cosmovisión mayas en Chiapas.* Plaza y Valdés.

Levi, E. (1989). *El agua según la ciencia.* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Levi, E. (2001). *El agua según la ciencia.* IMTA.

Lizana, A. (2012). *Diseño de un procedimiento de captura y representación del conocimiento TPACK en la enseñanza universitaria* [Tesis de maestría no publicada]. Universitat de les illes balears.

López, Y. y Victoria, D.A. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en un contexto multicultural hacia un currículum intercultural. Revista de Investigaciones UCM, 15*(26), 44-55. http://dx.doi.org/10.22383/ri.v15i2.43.

Luria, A. R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*. Akal.

Martínez, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *Suma, 61*(), 7-15.

Mason, S. (2012). *Historia de las ciencias, 1: desde la antigüedad hasta la revolución científica de los siglos XVI y XVII.* Alianza Editorial.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(1), 25-68.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* [Tesis de doctorado no publicada]. Cicata-IPN.

Matthews, M. R. (2017). *La enseñanza de la ciencia, un enfoque desde la historia y la filosofía de la ciencia.* Editorial Fondo de Cultura Económica.

Mendoza, E. y Cordero, F. (2015). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. El caso de la estabilidad. En Sánchez, E., Acuña, C., Rigo, M., Valdez, J. y Torres, O. (Eds.), Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa (pp. 1-14). Cinvestav.

Montaña, A., Pérez, A. y Torres, N. (2016). Aproximaciones teóricas sobre el desarrollo del pensamiento numérico en educación primaria. *Educación y Ciencia,* (19), 107-125.

Morales, E. (2020). *Experimentos en contextos eléctricos y uso de una Physlet para significar el Campo Eléctrico en estudiantes de Educación Media Superior* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Mounoud, P. (2001). El Desarrollo Cognitivo Del Niño: Desde Los Descubrimientos de Piaget Hasta Las Investigaciones Actuales. *Contextos educativos,* (4), 53-77.

Muñoz, G. (1996a). *Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav-IPN.

Muñoz, G. (1996b). Algunos elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral. En J. Rodriguez (Ed.). *Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp.109-114). Universidad de Puerto Rico.

Muñoz, G. (1997a). On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in kinematics. In J.Dossey, J. Swafford, M. Permantie & A. Dossey (Eds). *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.1* (pp.63-64). Illinois State University.

Muñoz, G. (1997b). Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la Cinemática. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame* (pp.64-68). Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (1997c). On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in Kinematics. En J. Dossey, J. Swafford, M. Permantie y A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the Noneteenth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 63-64). Illinois State University.

Muñoz, G. (1998). Las Relaciones entre lo Conceptual y lo Algorítmico: el caso de la integración. *Antología Número 3* del Programa Editorial del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Serie Antologías, pp. 185-222.

Muñoz, G. (1999a, 2-5 de junio). *Aspectos epistemológicos de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, en la integración* [Sesión de Ponencias]. 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society, Ciudad de México, México.

Muñoz, G. (1999b, 2-5 de junio). *Relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde la perspectiva de la psicogénesis de la integral* [Sesión de Posters]. 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society, Ciudad de México, México.

Muñoz, G. (1999c). Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 12*(1), 34-37.

Muñoz, G. (2000a). Análisis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el aprendizaje y enseñanza de la integral. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(1), 96-103.

Muñoz, G. (2000b). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 131-170.

Muñoz, G. (2001). Tipos de mediación social en la didáctica del Cálculo integral: lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14*(1), 532-539.

Muñoz, G. (2002). Lo conceptual y lo algorítmico como base de la didáctica del cálculo integral. Serie antológica No. 2. *Red Nacional de Centros de Investigación en Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (pp. 281-310). Editada por la Universidad Autónoma de Chiapas y la Universidad Valle del Grijalva.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del cálculo integral: relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16*(2), 415-421.

Muñoz, G. (2004a). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a prácticas sociales con Cálculo integral. En J. Lezama (Ed.), *Resúmenes de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (p.40). Clame ILCE.

Muñoz, G. (2004b). Naturaleza de un campo conceptual del Cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. En J. Lezama (Ed.), *Resúmenes de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (p.152). Clame ILCE.

Muñoz, G. (2005a). Naturaleza de un campo conceptual del Cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*(1), 589-595.

Muñoz, G. (2005b). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a prácticas sociales con Cálculo integral. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Clame. 18*(1), 597-603.

Muñoz, G. (2006). Relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama & A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 423-451). Clame A.C. y Ediciones Díaz de Santos.

Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: Aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos.* [Tesis de doctorado no publicado]. Cinvestav-IPN.

Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo integral escolar fundamentado en la Predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Navarro, C. Carrillo e I. López (eds.), *Matemática Educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 27-76). Ediciones Díaz de Santos.

Muñoz-Ortega, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 283–302.

Muñoz, G. (2015). *Un enfoque alternativo para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral en Escuelas de Ingeniería*. Ed. Palibrio.

Muñoz, G. y Cordero, F. (1994). *About Symbiosis Between Notion and Algorithm in Integral Calculus. Short Oral Presentatión. Memorias de la Eighteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* University of Lisboa.

Muñoz, G. y Cordero, F. (1998). Epistemological and cognitive aspects of the link between the conceptual and the algorithmic in the teaching integral calculus. *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting oh the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 157). North Carolina State University.

Muñoz, G., Díaz, L., Cordero, F., Czarnocha, B., Poblete, A. y Díaz, V. (2001). El papel de la sociocultura en la didáctica de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14*(1), 618-625.

Muñoz, G., Cordero, F. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. y Núñez, E. (2013). Prácticas de contar, medir y calcular como alternativas de enseñanza y el rediseño del discurso matemático escolar. *XVI EIME.* 190-197.

Nava, J., Pezet, S. y Hernández, G, (2001). *El Sistema Internacional De Unidades (SI). Centro Nacional De Metrología.* Los Cués.

Newton, I. (1728). *Sistema del Mundo.* Ediciones Sarpe.

Newton, I. (1984). *Tratado de la cuadratura de las curvas* (2da Ed.). Universidad Autónoma de Puebla.

Newton, I. (1987). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (A. Escohotado, trad.). Ed. Tecnos.

Olivé, L. (1994). *La explicación social del conocimiento.* Universidad Nacional Autónoma de México.

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática. Vo. 1, la matemática en la antigüedad*. LATEX.

Orton, A. (1983). *Students Understanding of integration. Educational Studies in Mathematics (14)*, 1-18.

Päch, S., y Franke, H. [georgeneckman]. (11 de septiembre de 2011). *La bombilla de Thomas Edison, Genios e inventos de la humanidad.* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=HzUidSTQSUQ

Pardo, N. G. (1998). *Introducción a la semiótica.* Signo y cultura. Ediciones UNAD.

Paz, L. (2019). *Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre La Geometría de Descartes y el discurso Matemático Escolar* [Tesis de maestría no publicada,]. Cinvestav-IPN.

Peltier, M. (1993). Una visión general de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. *Educación Matemática,* 5(2), 4-10.

Peña-Rincón, P.A. y Blanco-Álvarez, H. (2015). Reflexiones sobre cultura, currículo y Etnomatemáticas, en Regina Cortina y Katy de la Garza (compiladoras). *Educación, pueblos indígenas e interculturalidad en América Latina* (pp. 213-245). Ediciones Abya-Yala.

Pérez, R. (2019). *Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar* [Tesis de maestría no publicada,]. Cinvestav-IPN.

Piaget, J. (1970). *Naturaleza y métodos de la epistemología.* Ed. Proteo.

Piaget, J. (1972). *Psicología y Epistemología.* Emecé.

Piaget, J. (1972). *Estudios de Psicología Genética.* Emecé.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas* (2da Ed.). Problema central del desarrollo. Siglo XXI Editores.

Piaget, J. (1991). *Introducción a la Epistemología Genética. Tres Volúmenes.* Paidós.

Piaget, J. (1996). *Las formas elementales de la dialéctica.* Gedisa

Piaget, J. y García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (6ª. Ed). Siglo XXI Editores.

Polian, G. (2018). *Diccionario Multidialectal del tseltal.* de Secretaría de Cultura Instituto Nacional de Lenguas Indígenas

Poveda, G. (2003). La electricidad antes de Faraday. Parte 1. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia,* (30), 130–147.

Prigogine, I. (2004). *Las leyes del caos.* Editorial Crítica.

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: La transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav-IPN.

Quezada, Ma. (1986). *Cálculo de Primitivas en el Bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav-IPN.

Ramos, S. E. (2005). *Análisis socioepistemológico de los procesos de matematización de la predicción en la Economía* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Chiapas

Ríos, D. (2020). *Socioepistemología y transversalidad: una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav-IPN.

Ríos, D., y Cantoral, R. (2019). Estudio socioepistemológico acerca de los vínculos entre los teoremas fundamentales de la aritmética, el álgebra y cálculo. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 134–139.

Robinet, J. (1984). Ingénierie didactique de l´lémentaire au supérieur [Tesis doctoral no publicada]. Université de Paris VII.

Rodríguez, R, y Zuazua, E., (2002) *Enseñar y aprender matemáticas: del Instituto a la Universidad. Revista de Educación,* (329). 239-256.

Rojas, P.J., Rodríguez, J., Romero, J.H., Castillo, E. y Mora, L. (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Editorial Gaia.

Ruiz, J., Mora, C. y Álvarez, N. (2011). Una propuesta didáctica para la formación integral en los estudiantes de Física del Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Nuevo León México. *Lat. Am. J. Phys. Educ. 5(1)*, 285-292.

Salat, R. (1992). *Cálculo infinitesimal. Lecciones de Cálculo para Docentes de Ingeniería. Vol.3,* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Salinas, P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio* [Tesis de doctorado]. Cinvestav-IPN.

Salinas, P., Alanís, J., Escobedo, J., Garza, J., Pulido, R., y Santos, F. (2001). *Elementos del Cálculo. Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza. Primera edición.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática (16)*, 141-155.

SEP (2011) *Plan y Programa de estudios 2011. Educación Básica.* Secretaria de Educación Pública.

SI (2006) *The International System of Units.* Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre. 8e édition.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. Vol. 2*. School of Education University of Exeter: The Falmer Press.

Sierra, E. (2008). *Pesas y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero].

Stewart, I. (2009). *Historia de las matemáticas, en los últimos 10,000 años,* ed. Critica.

Struik, D. (1994). *Historia concisa de las matemáticas.* Instituto Politécnico Nacional.

Tucker, T.W. (1991). *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources.* MAA.

Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet. 14*(1), 1-48.

Velasco, E., Cancino, M. y Mazariegos, A. de J. (2021). Crecimiento del maíz en fases lunares, diseño de una actividad didáctica para una comunidad tzeltal. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 10(27)*. 48-71. https://doi.org/10.31644/IMASD.27.2021.a03

Vergnaud, G. (1990a). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(13), 133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En Nesher y Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition:A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). University Press

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Editorial Trillas.

Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 227-240). Kluwer Academic Publishers.

Vygotski, L. S. (1982). *Obras Escogidas II. Incluye Pensamiento y Lenguaje, y Conferencias sobre Psicología.* Ed. Visor.

Vygotski, L. S. (1982). *Obras Escogidas. Seis tomos.* Ed. Visor.

Wertsch, J. V. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Ed. Paidós.

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la Mente: Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada.* Ed. Visor.

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica del Cálculo Integral.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Zúñiga, Francisco Agustín (2020). *Un análisis del sistema de referencia variacional en un contexto de circuitos eléctricos con estudiantes de nivel superior.* Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 5, 1-22.

Génesis histórica de sistemas Numéricos, Algebraicos
y del Cálculo Variacional
Base de una educación mediada socioculturalmente
por actividades de contar, medir, calcular y predecir

Coordinadores: Erivan Velasco Nuñez, Germán Muñoz Ortega y
Edgar Javier Morales Velasco se terminó de editar en octubre del 2024.

§

Universidad Autónoma de Chiapas
Universidad Autónoma de Yucatán