

## Estabilidad de Lyapunov de una viga de Euler-Navier-Bernoulli

### *Lyapunov stability of a Euler-Navier-Bernoulli beam*

Armando Mendoza Pérez <sup>1</sup>  
Elí Santos Rodríguez <sup>2</sup>

#### RESUMEN

La viga es uno de los elementos fundamentales en la ingeniería de estructuras. Fenómenos interesantes ocurren en la estructura bajo la presencia de fuerzas, vibraciones modales, etc. Estudiaremos la estabilidad de una viga de Euler-Navier-Bernoulli sujeta a una fuerza axial, vista como un problema de valores a la frontera, usando el método de Lyapunov. También estudiamos una viga sujeta a una fuerza de control. Probamos que bajo ciertas condiciones físicas, el sistema es estable.

**Palabras clave:** Estabilidad, punto de equilibrio, funcional de Lyapunov.

#### ABSTRACT

The beam is one of the fundamental elements of an engineering structure. Interesting physical phenomena occur in the structure with the presence of forces, resonances, modal vibrations, etc. We study the stability of an Euler-Navier-Bernoulli beam subjected to an axial force, as an initial boundary value problem, using the Lyapunov's Direct Method. We also study the stability of a beam under a control force. We prove that under certain physical condition, stability is assured.

**Keywords:** Stability, point of balance, Lyapunov functional.

#### INTRODUCCIÓN

La estabilidad y el control aeroelástico de determinadas estructuras de la ingeniería civil, como los puentes suspendidos, vigas, pasarelas, etc., han sido objeto de estudios, tanto experimentales como numéricos. La ecuación de Euler-Navier-Bernoulli permite encontrar el esfuerzo o torca en vigas delgadas. Se ha desarrollado un aparato teórico-matemático que ha permitido precisar la noción de *estabilidad*: numerosos fenómenos donde intervienen las estructuras son modelados por una ecuación en derivadas parciales, la cual toma en cuenta las diversas características del problema (conservación de la energía, cantidad de movimiento, interacción fluido-estructura, etc.). En otras ocasiones buscamos actuar sobre estos fenómenos (por ejemplo, aplicando una fuerza) con la finalidad de que el sistema nos proporcione una respuesta controlada (estos sistemas se dicen *controlados*) y en este caso la ecuación diferencial dependerá de un parámetro llamado control. En cualquier caso, deseamos predecir el comportamiento de estas estructuras a partir del estudio cualitativo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que

modelan al fenómeno. En particular nos interesa establecer condiciones necesarias y/o suficientes para la estabilidad (y/o la inestabilidad) del estado de equilibrio de la estructura, relacionándolas con valores críticos de los parámetros físicos del fenómeno. La noción matemática de estabilidad o estabilidad asintótica del estado de equilibrio se caracterizará en primera instancia por reflejar el siguiente comportamiento del sistema:

- El equilibrio del sistema es atractivo, i.e., todas las trayectorias convergen hacia el equilibrio del sistema (como ocurre con una viga o puente sujeto a una perturbación externa, la cual induce vibraciones en la estructura. Una vez pasada la perturbación o aplicado un control sobre la estructura, esperamos que ésta retorne a su estado de equilibrio).
- El equilibrio es estable, i.e., las trayectorias del sistema no se alejan demasiado (durante el periodo transitorio) del estado de equilibrio (en el caso del ejemplo de arriba, se desea que la estructura responda de tal manera que sus oscilaciones no la alejen del estado de equilibrio, y por el contrario se acerque a este estado lo más rápido posible).

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas. Blvd. Belisario Domínguez km 1081, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Méxco.

<sup>2</sup> Licenciatura en Física y Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas. 4a. Oriente entre 13a. y 14a. Norte, Col. Los Almendros, Tuxtla Gutiérrez Chiapas, México.  
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

En el presente artículo expondremos la noción matemática de *estabilidad* del punto de *equilibrio* de una ecuación diferencial. En un artículo posterior nos ocuparemos del caso cuando existe un control sobre el sistema (Briffau, 1999). Se darán ejemplos de cómo se aplica este aparato teórico para estudiar la estabilidad de estructuras de la ingeniería civil, en particular el elemento constitutivo de numerosas multiestructuras flexibles como son las vigas de Euler-Navier-Bernoulli. El primer ejemplo se enmarcará en un caso estático. El segundo ejemplo consistirá en un problema dinámico en el que actúa un control sobre la estructura.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Teoría matemática de la estabilidad

#### Antecedentes

La noción de estabilidad tiene su fuente en la mecánica clásica. Fue a partir de estas nociones que permitieron establecer una definición rigurosa de este concepto.

Los primeros avances para entender la noción de estabilidad de las estructuras elásticas fue hecha por Euler (1707-1783) en su trabajo llamado *Elástica*, el cual trataba sobre las fuerzas de compresión axial en barras, considerando el caso cuando la compresión de un extremo de la barra se incrementa, y es medido respecto a un parámetro. Para un valor crítico alcanzado del parámetro —conocido como el *valor crítico de Euler*— la barra tiende a permanecer recta. Más allá de este valor, la barra puede tomar otras dos formas simétricas en equilibrio, de tal manera que en el valor crítico se observan tres posibles soluciones; más aún, la dependencia respecto al parámetro de carga resulta continua. Tales puntos se denominan *puntos de ramificación*. Mientras más cercano esté el parámetro de carga al valor crítico de Euler, la comba de la barra tenderá a permanecer en forma rectilínea. Euler supuso que este valor crítico representa la mínima compresión axial en la que por encima de él, la forma recta de la barra deviene inestable. Se ve también una dependencia continua de la tensión y el desplazamiento de la barra respecto al parámetro —esto cercano al punto crítico—, lo que nos obliga a usar las herramientas del cálculo. Una aproximación en ese sentido se basa en la linealización del problema alrededor de la

solución correspondiente a la forma recta de la barra, con lo que Euler introdujo tempranamente un problema de eigenvalores en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la ingeniería, los puntos críticos, los cuales están relacionados con ciertos estados de equilibrio, son asociados con pérdida de estabilidad: esto lo confirmamos experimentalmente cuando incrementamos la carga por encima del valor crítico de la estructura y observamos que ésta cambia cualitativamente de forma, hasta llegar posiblemente a la ruptura. El método de linealización de Euler, pertenece a la estática. En lo que sigue consideraremos la noción de estabilidad desde un punto de vista dinámico.

La forma final de la definición de estabilidad dinámica fue desarrollada por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) relacionando la estabilidad con las condiciones iniciales del movimiento. Un sistema mecánico simple consiste en un punto de masa  $m$ , ligado a un resorte, el cual tiene un coeficiente de rigidez  $k$ , y que oscila bajo una fuerza armónica  $F = f \cos \omega t$ . La ecuación del movimiento es

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = f \cos \omega_0 t$$

Si  $f = 0$ , se tiene un movimiento oscilatorio armónico simple con frecuencia  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Cuando  $\omega \neq \omega_0$ , una pequeña  $f$  proporcionará al sistema pequeñas perturbaciones en amplitud. Cuando el valor de  $\omega$  está muy próximo a  $\omega_0$ , estas perturbaciones comenzarán a crecer, y cuando  $\omega = \omega_0$  la solución contendrá un término proporcional a  $t \cos \omega_0 t$ . Este término crecerá indefinidamente conforme el tiempo transcurra. Lo mismo ocurre con la dinámica de las estructuras elásticas: existen frecuencias resonantes en las cuales una fuerza externa arbitrariamente pequeña puede dar lugar a oscilaciones crecientes. Este fenómeno lo podemos explicar en términos de la energía que se acumula en el sistema durante cada ciclo. Raramente observamos oscilaciones cuya amplitud crece infinitamente, puesto que en cualquier sistema real, la fricción absorberá parte de la energía, y así las fuerzas de fricción amortiguarán a las fuerzas resonantes, y es por esta razón que nos interesa estudiar la estabilidad desde un punto de vista dinámico. La noción de estabilidad de Lyapunov (también llamado *método directo de Lyapunov*) es la llave para entender la estabilidad en una gran variedad

de sistemas dinámicos y se caracteriza por tomar en cuenta la energía del sistema. En particular, la estabilidad de Lyapunov se utiliza con éxito en las estructuras elásticas sobre las cuales actúan fuerzas y cargas de diversos tipos.

### Método directo de Lyapunov. Nociones fundamentales

Toda ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales), de cualquier orden, se puede expresar de la forma:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}, t), \quad (1)$$

Donde  $F(\vec{X}, t)$  es una función suave de  $\vec{X}$  y de la variable  $t$ ,  $\vec{X}$  estará en el espacio fase de la ecuación diferencial.

Decimos que un punto  $\vec{X}_0$  es un *punto de equilibrio* de la ecuación diferencial 1, si

$$F(\vec{X}_0, t) = 0, \quad (2)$$

En lo que sigue, trabajaremos ecuaciones diferenciales autónomas, es decir, cuando  $F$  no depende explícitamente de  $t$ . En este caso  $F$  definirá un *campo vectorial* en el espacio fase de la ecuación diferencial.

Para ejemplificar, consideremos la ecuación que gobierna el movimiento de un péndulo simple con fricción:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta - \frac{k}{m} \omega \quad (4)$$

Poniendo  $\vec{X} = (\theta, \omega)$  y  $F(\theta, \omega) = F(\vec{X}) = \left( \omega, -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta - \frac{k}{m} \omega \right)$ , la ecuación del péndulo 3 se puede poner de la forma 1. Los puntos de equilibrio son en este caso los pares  $(\theta, \omega)$ , tales que  $F(\theta, \omega) = \left( \omega, -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta - \frac{k}{m} \omega \right) = (0, 0)$ .

Luego existen dos puntos de equilibrio para el péndulo:

$$\begin{cases} \omega = \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \quad (5)$$

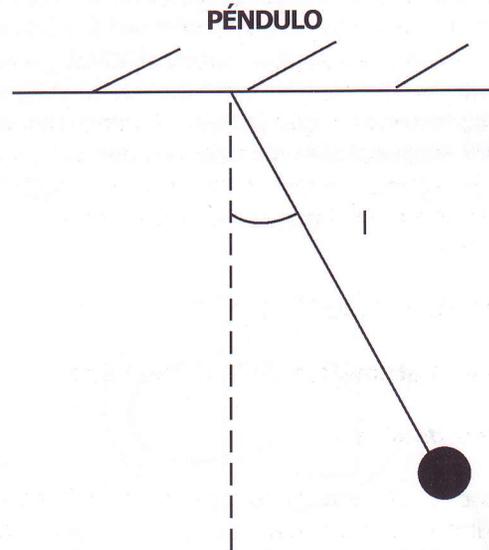


Figura 1. En los trabajos pioneros de Ch. Huygens y R. Hooke sobre la oscilación del péndulo, el último objetivo era la medición del tiempo, enfocándose principalmente al estudio de la estabilidad y el control del movimiento, con la finalidad de construir dispositivos que sirviesen a la navegación y al posicionamiento de los navíos.

Como se ha dicho antes, un número importante de eminentes matemáticos y físicos del siglo XIX se ocuparon de estudiar los problemas de estabilidad, entre ellos sobresalen Lagrange, Kelvin, Routh, Shukovskii y Poincaré. Pero fue hasta 1893 cuando el matemático ruso Alexander Mijailovich Lyapunov, introduce una definición con rigor matemático mucho más general que el concepto que se entendía en la mecánica. Lyapunov introduce los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica (Lyapunov, 1949).

Posteriormente aparecen los conceptos de estabilidad uniforme, asintótica uniforme, global, exponencial, y un largo etcétera, los cuales se adecuan al fenómeno particular que se esté estudiando.

*Definición.* Supongamos que  $\vec{X}_0$  es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (1). Decimos que es un *punto de equilibrio estable* si toda región  $U$  en el espacio fase que lo contenga, tendrá una subregión  $U_1$  la cual también contiene a, de tal

forma que toda solución de (1) donde la condición inicial pertenezca a  $U_1$ , entonces la solución pertenecerá a  $U > 0$ .

El significado físico de la estabilidad es obvio: un objeto físico (como una estructura, un puente, una máquina, etc.), cuya ley de movimiento está expresada por una ecuación diferencial, sólo se puede hallar en la posición de equilibrio  $\vec{X}_0$  si es estable; en caso contrario, una desviación insignificante respecto a esta posición de equilibrio lo alejará sensiblemente de esta posición.

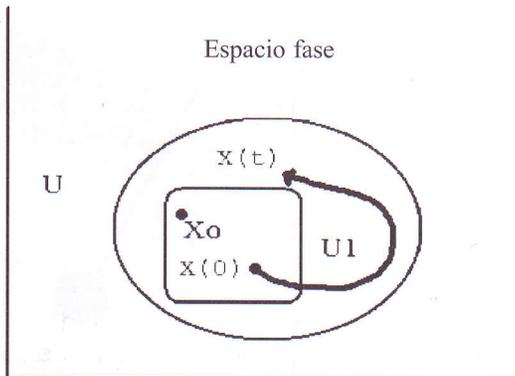


Figura 2.  $\vec{X}_0$  es un punto de equilibrio estable

Si además se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{X}(t) = \vec{X}_0$$

entonces se dice que el punto de equilibrio  $\vec{X}_0$  es *asintóticamente estable*.

**Teoremas de Estabilidad Dinámica**

A través de la definición de ciertas funcionales asociadas a la ecuación diferencial (funcionales de Lyapunov), algunos problemas relacionados con la acotación y con la estabilidad pueden ser tratados de manera sistemática.

Damos dos teoremas fundamentales en el estudio del concepto de estabilidad, tal y como se ha definido arriba (Hahn, 1963).

**Teorema 1. (Primer Teorema de Estabilidad.)** Sea un punto de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}). \tag{6}$$

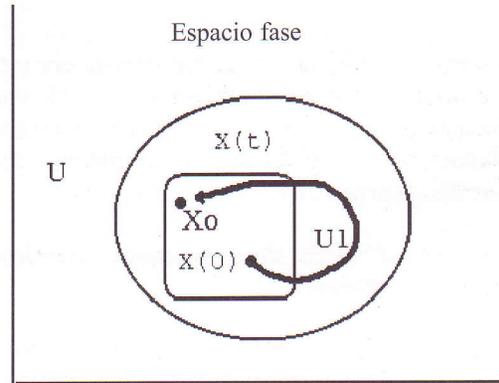


Figura 3.  $\vec{X}_0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable

Supongamos que la matriz jacobiana de  $F$  en  $\vec{X}_0$ ,  $[JF(\vec{X}_0)]$ , tiene valores propios (eigen-valores) de tal forma que sean partes reales sean menores que  $-c$ , para un  $c > 0$ . Entonces:

1. El punto de equilibrio  $\vec{X}_0$  es asintóticamente estable.
2.  $dist(\vec{X}(t), \vec{X}_0) = \|\vec{X}(t) - \vec{X}_0\| \leq ke^{-ct} \|\vec{X}(0) - \vec{X}_0\| \quad \forall t \geq 0$

**Teorema 2. (Segundo Teorema de Estabilidad.)** Sea  $\vec{X}_0$  un punto de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}). \tag{7}$$

Supongamos que existe una funcional suave  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un entorno  $D$  de  $\vec{X}_0$  y toma valores en los números reales.

Asumimos que  $V$  satisface:

- a) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $V(\vec{X}) \geq \alpha \|\vec{X}\|^2 \quad \forall \vec{X} \in D$
- b) Existe  $\beta > 0$  tal que  $V(\vec{X}) \leq \beta \|\vec{X}\|^2 \quad \forall \vec{X} \in D$
- c)  $\frac{dV}{dt}(\vec{X}(t)) \leq 0 \quad \forall t$ , donde  $\vec{X}(t)$  es solución de (5).

Entonces el punto de equilibrio  $\vec{X}_0$  es estable. Además, sí vale:

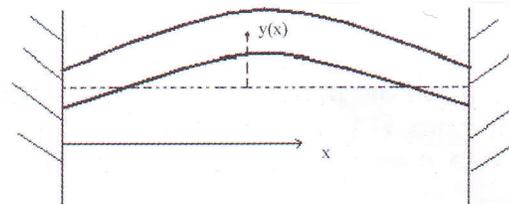


Figura 4: Viga de Euler-Navier-Bernoulli

d)  $\frac{dV}{dt}(\bar{X}(t)) \leq -\alpha V(\bar{X}(t)) \quad \forall t$ , donde  $\bar{X}(t)$  es solución de (5).

Entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Una funcional  $V$  que satisface las hipótesis a), b) y c) del Teorema precedente se llama funcional de Lyapunov asociada a la ecuación diferencial (6).

### Comportamiento estable de una ecuación de una viga de Euler-Navier-Bernoulli

Consideremos una viga encastrada en sus dos extremos, sobre la cual actúa una presión de compresión axial de magnitud constante  $F$ . La ecuación diferencial que modela este fenómeno viene dada por Bartucelli & Gentile, 2003, y Plaut, 1967:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + F \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \gamma A \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = 0 \quad (8)$$

La energía potencial total de la viga es

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \right)^2 dX - \frac{F}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial Y}{\partial X} \right)^2 dX \quad (9)$$

donde  $X$  es la coordenada axial,  $Y$  el desplazamiento transversal,  $T$  el tiempo,  $EI$  el coeficiente de rigidez,  $A$  el área de sección transversal de nuestra viga y  $\gamma$  su densidad de masa. Aquí  $0 \leq T$  y  $0 \leq X \leq L$ , donde  $L$  es la longitud de la viga. Haciendo los cambios de variables

$$y = \frac{Y}{L}, \quad t = T \sqrt{\frac{EI}{\gamma L^4}}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad f = \frac{FL^2}{EI} \quad (10)$$

la ecuación (7) se transforma en

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + f \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

donde las nuevas variables resultan adimensionales,  $0 \leq t$  y  $0 \leq x \leq 1$ ,  $f > 0$ .

La energía potencial total de la viga es, con estas variables adimensionales:

$$\pi = \pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{f}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (12)$$

La velocidad transversal es

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}$$

El sistema (10) equivale, entonces

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - f \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{cases} \quad (13)$$

Poniendo  $\bar{X} = (y, v) Y^F(\bar{X}) = (v, -\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - f \frac{\partial^2 y}{\partial x^2})$ , vemos que la posición de equilibrio de la viga corresponde al punto de equilibrio de la ecuación diferencial (10). De hecho, note que

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = F(\bar{X}) = -A\bar{X}, \quad (14)$$

Donde  $A: D(A) \subset H \rightarrow H^3$  es un operador no acotado de dominio denso  $D(A) = H_0^2[0, 1] \times H_0^1[0, 1]$  sobre el espacio de Hilbert  $H = L^2[0, 1] \times L^2[0, 1]$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Resulta fundamental definir el operador  $A$ , el cual será un operador disipativo con dominio denso sobre un espacio de Hilbert infinito-dimensional. La existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación en derivadas parciales estará directamente relacionada a las propiedades del operador  $A$ , a través de un teorema del tipo de Hille-Yosida. Aquí se trata con soluciones generalizadas, lo que obliga necesariamente a introducir los espacios de Sobolev  $H_0^2 = [0, 1]$  y  $H_0^1 = [0, 1]$ .

La norma de cualquier  $U = (y, v)$  en  $D(A)$  es

$$\|U\|^2 = \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + y^2 \right) dx \quad (16)$$

Además, todo  $U = (y, v) \in D(A)$  satisface

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0) = \frac{\partial y}{\partial x}(1) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1) = 0 \quad (19)$$

El dominio  $D(A)$  expresa las condiciones iniciales del sistema, es decir las condiciones (16) a la (18) establecen por una parte, que la viga está encastrada por sus extremos.

La condición (16) significa que la viga no presenta desplazamiento en los extremos. Las relaciones (16), (17) y (18) implican las desigualdades integrales siguientes (Bartuccelli and Gentile, 2003).

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 y^2 dx \quad (20)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \geq 4\pi^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (21)$$

Las últimas dos desigualdades nos permitirán demostrar que la funcional definida por

$$V(U) = \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (22)$$

satisface las hipótesis de una funcional de Lyapunov.

**Lema 1.** Si  $f < \pi^2$ , entonces existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$V(U) = \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \geq \alpha \|U\|^2 \quad (23)$$

*Dem.* Consideremos una constante  $c = \frac{f + \pi^2}{2\pi^2}$ , claramente

$$V(U) = \int_0^1 \left( v^2 + (1-c) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + c \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

de la desigualdad (20)

$$V(U) \geq \int_0^1 \left( v^2 + (1-c) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + (c\pi^2 - f) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (24)$$

Sustituyendo el valor de  $c = \frac{f + \pi^2}{2\pi^2}$  se sigue

$$V(U) \geq \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\pi^2 - f}{2\pi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\pi^2 - f}{4} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\pi^2 - f}{4} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (25)$$

De la desigualdad (19) se tiene

$$\int_0^1 \left( \frac{\pi^2 - f}{4} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \geq \int_0^1 \left( \frac{\pi^2 - f}{4} \right) \pi^2 y^2 dx \geq \left( \frac{\pi^2 - f}{2\pi^2} \right) \int_0^1 y^2 dx \quad (26)$$

Finalmente, basta tomar  $\alpha = \frac{\pi^2 - f}{2\pi^2}$  de (24) y (25), teniendo en mente que  $\alpha \in (0,1)$  y  $\frac{\pi^2 - f}{4}$  se sigue inmediatamente que

$$V(U) = \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \geq \alpha \|U\|^2$$

lo que prueba el lema 1.

La funcional  $V(U)$  es acotada como lo prueba el siguiente:

**Lema 2.** Existe  $\beta > 0$  tal que

$$V(U) \leq \beta \|U\|^2 \quad (27)$$

*Dem.* Basta definir  $\beta = \max\{1, f\}$ .

**Lema 3.**  $\ddot{y} + \dot{v}(\bar{X}) = 0 \forall \bar{X} = (y, v)$  solución de la ecuación diferencial (12).

*Dem.* Usando la regla de Leibnitz y nuestras definiciones

$$\dot{V}(\bar{X}) = \frac{dV}{dt} = 2 \int_0^1 \left( v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \quad (28)$$

Integrando por partes, la ecuación (27) se expresa

$$\frac{dV}{dt} = 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + f \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) v dx + 2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} v - f \frac{\partial y}{\partial x} v \right) \Big|_0^1 \quad (29)$$

Tomando en cuenta las condiciones de frontera (16), (17) y (18), además de que la velocidad transversal claramente satisface  $v(0, t) = v(1, t) = 0$ , observamos que el segundo sumando de (28) es nulo. Por otro lado, el integrando resulta ser exactamente el lado izquierdo de la ecuación diferencial (10). Por lo tanto la integral necesariamente se anula, lo que prueba el lema 3.

Los lemas 1, 2 y 3 prueban que  $V$  definido por (21), es una funcional de Lyapunov asociada a la ecuación diferencial (7) —la cual modela el movimiento transversal de una viga sujeta a una presión axial  $F$ . Más precisamente enunciamos el siguiente teorema:

**Teorema.** Bajo las notaciones y definiciones anteriores, si una viga de Euler-Navier-Bernoulli sobre la que actúa una fuerza axial constante  $F$ , satisface la hipótesis del lema 1, es decir,

$$f < \pi^2$$

entonces el equilibrio de la viga es estable.

Dem. Los lemas 1, 2 y 3 nos dicen que la funcional  $V$  es de Lyapunov, asociada a la ecuación diferencial de la viga. Por el segundo teorema de estabilidad se sigue que el equilibrio de la viga es estable.

### Observaciones

La hipótesis del lema 1 tiene un importante significado físico. El teorema nos dice que una condición suficiente para que nuestra viga sea estable es

$$f = \frac{FL^2}{EI} = \frac{\pi^2 f}{F_E} < \pi^2$$

donde  $F_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  es la presión de Euler de una viga simplemente soportada. Así, el teorema establece que la presión de Euler  $F_E$  es una presión crítica de tal forma que para presiones axiales  $F < F_E$ , la viga permanece estable. De hecho vale el resultado recíproco: Si la carga axial que soporta una viga es  $F > F_E$ , entonces el equilibrio de la viga es inestable (Plaut, 1967).

Otro hecho importante de observar es la estrecha relación entre la funcional de Lyapunov (21) y la energía potencial total (11) de nuestra

viga, lo que significa que la energía es una de las características del sistema que influirá decididamente en el comportamiento de su estado de equilibrio.

### Estabilidad de una ecuación no disipativa de una viga controlada linealmente

En esta sección estudiaremos la estabilidad de una viga controlada linealmente en una extremidad por una fuerza de control, función de la velocidad en este extremo. El otro extremo se halla libre. La ecuación que modela esta respuesta junto con las condiciones iniciales son

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(1, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t), & \frac{\partial^2 y}{\partial x^3}(1, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^3}(0, t) = -k \frac{\partial y}{\partial t}(0, t) \end{cases} \quad (30)$$

con  $k > 0$ .

En esta sección se prueba que la solución se comporta asintóticamente hacia  $axt + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a = b = c = 0$ , (basta establecer el cambio de funciones  $\tilde{y}(x, t) = y(x, t) - axt - bx - c$  y así basta probar que cualquier solución converge asintóticamente a 0). Con este cambio de funciones se puede probar que la ecuación que modela el fenómeno sigue siendo la ecuación (29).

Definimos para cada  $U = (y, v)$ , con  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ , la siguiente funcional:

$$V(U) = \int_0^1 \left( v^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (31)$$

En este caso, la funcional definida es ni más ni menos que la energía natural del sistema en cualquier instante  $t$ . Se demostrará que esta energía define una funcional de Lyapunov asociada a la ecuación diferencial (29).

Note la semejanza con la funcional de Lyapunov del ejemplo precedente (21). De igual manera a como se hizo en la sección anterior, se

puede probar que  $V(y, v)$  satisface los incisos a) y b) de la definición de funcional de Lyapunov. (Ver los lemas 1 y 2 precedentes). Probemos que se satisface el inciso c) de dicha definición:

**Lema 4.**  $\dot{V}(\bar{X}) \leq 0 \quad \forall \bar{X} = (y, v)$  solución de la ecuación diferencial (29).

Dem. Usando por segunda ocasión la regla de Leibnitz y nuestras definiciones

$$\dot{V}(\bar{X}) = \frac{dV}{dt} = 2 \int_0^1 \left( v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \quad (32)$$

Integrando por partes, la ecuación (31) se expresa

$$\dot{V}(\bar{X}) = \frac{dV}{dt} = 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) v dx + 2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} v \right) \Big|_0^1 \quad (33)$$

El integrando corresponde al lado derecho de la primera relación de (29) el cual es igual a 0. Usando los valores de frontera consignados en (29), se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) \frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = -k \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \leq 0, \quad (34)$$

con lo que el lema queda demostrado.

Se desprende de este lema que la funcional definida en (30) es una funcional de Lyapunov. Se sigue inmediatamente del segundo teorema de estabilidad de Lyapunov el siguiente:

**Teorema.** El punto de equilibrio  $U \left( y, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = (0, 0)$  de la ecuación diferencial (29), es estable en el sentido de Lyapunov.

De hecho vale el siguiente resultado que es más general (Cherkoui, 2002):

**Teorema.** Para todo  $C > 1$  existe un  $\delta > 0$  tal que para cada solución de la ecuación (29) vale

$$V(t) \leq C e^{-\delta t} V(0) \quad (35)$$

De aquí y del hecho de que  $V$  sea una funcional de Lyapunov, se sigue que

$$\left\| y(x, t), \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \right\| \leq V(t) \leq C e^{-\delta t} V(0) \quad (36)$$

esta desigualdad implica que cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\left( y(x, t), \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \right) \rightarrow (0, 0) \quad (37)$$

Es decir  $(0, 0)$  es asintótica y exponencialmente estable en cierto espacio normado de funciones  $H$ .

## CONCLUSIONES

Regresando con el cambio de funciones  $\tilde{y}(x, t) = y(x, t) - axt - bx - c$ , se sigue que la solución converge asintóticamente a  $axt + bx + c$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(x, t) = axt + bx + c \quad (38)$$

donde  $a, b$  y  $c$  dependen de los parámetros físicos del sistema y de las condiciones iniciales.

El control de una viga de Euler-Navier-Bernoulli a través de una fuerza de control en un extremo, proporcional a la velocidad transversal en dicho extremo, proporciona una respuesta estable (exponencialmente estable) por parte de la estructura, y el estado del sistema converge asintóticamente a un polinomio de grado dos en las variables  $x$  y  $t$  (posición longitudinal y tiempo).

Nuevamente, la funcional de Lyapunov (30) está íntimamente relacionada con la energía del sistema, sobre todo con la energía potencial. En su momento, Lagrange y Dirichlet demostraron que el estado de equilibrio de una masa puntual sujeto a una fuerza conservativa, en el cual la energía potencial total toma su valor mínimo, las trayectorias que comienzan en alguna vecindad pequeña del punto de equilibrio, en todo momento pertenecerán a una vecindad pequeña de dicho punto. El método directo de Lyapunov generaliza el criterio de Lagrange-Dirichlet —basado en el teorema de la conservación de la energía para un sistema de masas puntuales. Las funcionales de Lyapunov (21) y (30) son un tipo especial de funcionales que juegan el papel de energía en los dos problemas estudiados arriba. Identificando a

$V(t)$  dado en (30) con la energía natural del sistema en cada instante de tiempo  $t$ ; la relación (34) establece que la energía mecánica del sistema sufre un decaimiento exponencial, fundamento del comportamiento exponencialmente estable de la viga.

En las demostraciones anteriores, para simplificar el método, hemos omitido los espacios funcionales (normados) asociados, y las correspondientes normas, objetos formales del Análisis Funcional que nos proporcionan el marco de la teoría, desde el concepto de vecindad del punto de equilibrio, hasta la convergencia asintótica de la solución respecto a una norma y la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales.

Las soluciones y los puntos de equilibrio "viven" en estos espacios normados infinitodimensionales, su comportamiento asintótico se da en términos de las normas de estos espacios. De allí su importancia. También nos revela la necesidad creciente de introducir en la ingeniería teorías matemáticas más abstractas.

En la práctica en ingeniería, vemos que los valores críticos medidos pueden diferir de los valores críticos predichos. Esto ocurre en parte debido a que el modelo no toma en cuenta todas las características del fenómeno, es decir los modelos son limitados. Pueden ofrecer buenas descripciones en algunas circunstancias, y pobres en otras. Sin embargo, para los dos problemas

tratados en el artículo, los modelos aplicados ofrecen una buena descripción de la estabilidad del sistema.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al grupo de Gravitación y Cosmología del Departamento de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa y al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, por sus comentarios al presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Bartuccelli M., & Gentile, G. (2003). On a class of integrable time-dependent dynamical systems. *Physics Letters A*, 307 (5-6), 274-280.
- Brézis, H. (1983). *Analyse Fonctionnelle*. Paris: Masson Editeur.
- Briffau, J.S. (1999). *Contrôle et stabilisation rapide des grandes structures flexibles*. Tesis doctoral, École National de Ponts et Chaussées.
- Cherkouï, M. (2002). *Existence et comportement asymptotique pour une équation de poutres non dissipative*, Reporte de investigación, Universidad Henri Poincaré.
- Hahn, W. (1963). *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Lyapunov, A.M. (1949). Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Math. Studies*, vol. 17, Princeton Univ. Press, (Artículo traducido del ruso, aparecido en *Comm. Soc. Math. Kharkow*, 1893).
- Plaut, R.H. (1967). *A Study of the Dynamical Stability of continuous elastics systems by Liapunov's Direct Method*, University of California, Report AM673.