

# Un modelo de cálculo para pronosticar la respuesta dinámica no medida de sistemas estructurales

## *A calculation model for predicting the unmeasured dynamic response of structural systems*

ALEJANDRO RUIZ SIBAJA<sup>1</sup>, F. VIDAL SÁNCHEZ<sup>2</sup>, C. ARANDA CABALLERO<sup>2</sup> Y R. SUÁREZ GÓMEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Profesor de tiempo completo, Facultad de Ingeniería, Campus I, Universidad Autónoma de Chiapas, Boulevard Belisario Domínguez Km 1081, Del. Terán, 29050, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Tel. (+52) 961.61.503.22, ext. 206. Correo e: asibaja@unach.mx, rsuarez@unach.mx

<sup>2</sup>Investigador, Instituto Andaluz de Geofísica, C/Profesor Clavera nº 12, Campus Universitario de Cartuja, 18071, Granada, España. Tel. (+34) 958.240.900. Correo e: fvidal@ugr.es, caranda@ugr.es

RECIBIDO EL 4 DE MARZO DE 2013 / ACEPTADO EL 6 DE JUNIO DE 2013

### RESUMEN

Cuando se efectúan mediciones de vibración sobre una estructura, usualmente no es posible obtener una descripción completa de la respuesta dinámica de la misma. Es decir, únicamente se obtiene respuesta en puntos seleccionados del sistema estructural completo, ya que resulta difícil hacer las mediciones en todos y cada uno de los puntos que conforman este sistema. Debe tenerse en cuenta que una estructura tiene un número infinito de grados de libertad y modos de vibración. Una solución al problema anterior es plantear las ecuaciones de equilibrio del sistema estructural e incorporar en este modelo, como condición de frontera, la respuesta dinámica parcial obtenida a partir de datos de vibración. Así, a partir de estas ecuaciones se puede deducir la respuesta dinámica completa del sistema estructural estudiado. En este trabajo se presenta una metodología para encontrar la respuesta, el desarrollo comprende la respuesta en vibración libre y forzada. El modelo propuesto se calibra contra mediciones realizadas en un modelo de laboratorio y se comparan los resultados con la solución teórica de la estructura. Se concluye que la metodología planteada constituye una mayor aproximación a la realidad física que el modelo teórico.

**Palabras clave:** Mediciones de vibración, modelación estructural, interpretación de señales, matriz dinámica de rigidez.

### INTRODUCCIÓN

Los sistemas estructurales de cualquier tipo están sometidos a cargas que varían en el tiempo, tales como las cargas originadas por terremotos, viento, maquinaria y oleaje. El efecto de estas cargas sobre las estructuras origina una respuesta dinámica que debe tenerse en cuenta en los cálculos estructurales, debido a que dicha respuesta puede exceder a la respuesta estática de manera notoria. Se han desarrollado numerosos modelos matemáticos para idealizar los sistemas estructurales gracias a los avances informáticos en los programas de cálculo. Sin embargo, es conveniente confirmar y mejorar los modelos de estructuras mediante técnicas experimentales. Al utilizar métodos para identificación de sistemas, los resultados experimentales pueden usarse para definir con mayor preci-

### ABSTRACT

When measuring vibration of a structure is performed is not always possible to obtain a full description of its dynamical response. That is, it can only measure this response at selected points of the whole structural system, since it is difficult to make these measurements in each and every one of the points that make up this system. It should be noted that a structure has almost an infinite number of degrees of freedom and vibrational modes. One solution to the above problem is to set the equilibrium equations of the structural system incorporating into this model, as a boundary condition, the partial dynamic response obtained from vibration data. Thus, the complete dynamic response of the structural system studied can be deduced from these equations. This paper presents a methodology to find out this answer; the proposal includes the free and forced vibration response. Results are also compared with the theoretical solution of the structure. It concludes that the proposed methodology exhibits a better approximation to the physical reality than the theoretical model.

**Keywords:** Measurements of vibration, structural modeling, signal interpretation, dynamic stiffness matrix.

sión las características dinámicas y calibrar los modelos matemáticos de las estructuras. Debido a la importancia de la infraestructura industrial para la economía de México, se ha hecho necesario desarrollar metodologías que determinen las características dinámicas de estructuras sometidas a carga dinámica de maquinaria. Entre esas metodologías destacan las que se basan en el análisis de la señal de vibración en el dominio de la frecuencia. Este análisis permite evaluar el comportamiento dinámico de estructuras ante vibración forzada, para estimar de forma realista los parámetros que caracterizan al sistema estructural y, a partir de esto, calcular la respuesta dinámica generalizada que ocurre en las estructuras en condiciones de operación. En este trabajo se propone una metodología para utilizar los resultados de mediciones de

vibración efectuadas en campo y, con base en esos datos, deducir la parte no medida de la respuesta dinámica de una estructura sometida a vibración forzada.

## METODOLOGÍA

### Modelo propuesto para respuesta en vibración libre

La metodología desarrollada supone que el sistema estructural es lineal, elástico y no amortiguado. En consecuencia, por definición de modo de vibración (Clough and Penzien, 1975) se tiene:

$$\{[K] - \rho_i^2[M]\}\{U_i\} = \{0\} \quad (1)$$

En donde  $[K]$  es la matriz estática de rigidez,  $\rho_i$  es la frecuencia natural circular de vibración,  $[M]$  es la matriz de masas,  $\{U_i\}$  es el vector modal asociado a  $\rho_i$ . En forma matricial, esto es:

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \rho_i^2 M_1 & K_{12} M_2 \\ K_{21} & K_{22} - \rho_i^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{0} \\ \hat{0} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

En la relación (2),  $\hat{u}_1$  es la fracción desconocida de la respuesta en vibración libre de la estructura,  $\hat{u}_2$  es la fracción medida de la respuesta en vibración libre,  $M_1$  y  $M_2$  son submatrices de masa asociadas a  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  respectivamente,  $K_{11}$  y  $K_{21}$  son submatrices de rigidez asociadas a  $\hat{u}_1$ ,  $K_{12}$  y  $K_{22}$  son submatrices de rigidez asociadas a  $\hat{u}_2$ . A partir de la relación (2) resulta:

$$(K_{11} - \rho_i^2 M_1)\hat{u}_1 + K_{12}\hat{u}_2 = \{\hat{0}\} \quad (3)$$

$$K_{21}\hat{u}_1 + (K_{22} - \rho_i^2 M_2)\hat{u}_2 = \{\hat{0}\} \quad (4)$$

Puesto que interesa conocer  $\hat{u}_1$  (la fracción desconocida del modo de vibración de la estructura), a partir de la ecuación (3) resulta:

$$\hat{u}_1 = -(K_{11} - \rho_i^2 M_1)^{-1} K_{12}\hat{u}_2 \quad (5)$$

En la cual  $\hat{u}_2$  y  $\rho_i$  son datos que se obtienen mediante mediciones de vibración (Ruiz Sibaja, 1991), y  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $M_1$ , son datos que se ob-

tienen teóricamente. Como comprobación del equilibrio dinámico la relación (5) debe sustituirse en (4):

$$\{-K_{21}(K_{11} - \rho_i^2 M_1)^{-1} K_{12}\}\hat{u}_2 + (K_{22} - \rho_i^2 M_2)\hat{u}_2 = \{\hat{0}\} \quad (6)$$

Finalmente, agrupando términos:

$$\{(K_{22} - \rho_i^2 M_2) - K_{21}(K_{11} - \rho_i^2 M_1)^{-1} K_{12}\}\hat{u}_2 = \{\hat{0}\} \quad (7)$$

Con la expresión (7) se comprueba que la amplitud de desplazamiento  $\hat{u}_1$ , calculada a partir de datos medidos y teóricos, cumple con el equilibrio dinámico planteado en las ecuaciones (1) y (2).

### Modelo propuesto para respuesta en vibración forzada

El equilibrio dinámico de un sistema estructural en vibración forzada puede escribirse (Ruiz Sibaja, 1991):

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\hat{x}_0\} = \{\hat{F}_0\} \quad (8)$$

En la expresión (8)  $\omega$  es la frecuencia de excitación,  $\hat{x}_0$  es el vector de amplitudes de desplazamiento y  $\hat{F}_0$  es el vector de amplitudes de la fuerza de excitación. Debe observarse que la matriz dinámica de rigidez  $K_{DIN} = [K] - \omega^2[M]$  puede obtenerse de acuerdo con la siguiente relación (Ruiz Sibaja, 2005):

$$K_{DIN} = [K] - \omega^2[M] = \sum_{i=1} [M]\{U_i\}(\Omega_i)^{-1} B_i \{U_i\}^T [M] \quad (9)$$

Puede demostrarse (Ruiz Sibaja, 2005) que en la ecuación anterior  $\Omega_i = \{U_i\}^T [M] \{U_i\}$  y  $B_i = \rho_i^2 - \omega^2$ . De la inspección de la relación (9) se infiere que la matriz dinámica de rigidez,  $K_{DIN}$ , se obtiene a partir de los modos de vibración medidos,  $\hat{u}_2$ , y no medidos,  $\hat{u}_1$ , estudiados en el apartado anterior. Al escribir la ecuación (9) en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 M_1 & K_{12} M_2 \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

En la relación (10),  $\hat{d}_1$  es la fracción desconocida de la respuesta en vibración forzada de la estructura,  $\hat{d}_2$  es la fracción medida de la respuesta en vibración forzada,  $\hat{F}_1$  es la fracción de la fuerza de excitación asociada a  $\hat{d}_1$ ,  $\hat{F}_2$  es la fracción de la fuerza de excitación asociada a  $\hat{d}_2$ . Los demás términos tienen el mismo significado que se mencionó para la respuesta en vibración libre. A partir de la relación (10) resulta:

$$(K_{11} - \omega^2 M_1) \hat{d}_1 + K_{12} \hat{d}_2 = \{\hat{F}_1\} \quad (11)$$

$$K_{21} \hat{d}_1 + (K_{22} - \omega^2 M_2) \hat{d}_2 = \{\hat{F}_2\} \quad (12)$$

Puesto que interesa conocer  $\hat{d}_1$  (la fracción desconocida de la respuesta en vibración forzada de la estructura), a partir de la ecuación (11) resulta:

$$\hat{d}_1 = (K_{11} - \omega^2 M_1)^{-1} [\hat{F}_1 - K_{12} \hat{d}_2] \quad (13)$$

En la cual  $\hat{d}_2$  y  $\omega$  son datos que se obtienen mediante mediciones de vibración, y  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $M_1$ , son datos que se obtienen teóricamente. Como comprobación del equilibrio dinámico, la relación (13) debe substituirse en (12), así:

$$\begin{aligned} \{(K_{22} - \omega^2 M_2) - K_{21}(K_{11} - \omega^2 M_1)^{-1} K_{12}\} \hat{d}_2 \\ = \hat{F}_2 - K_{21}(K_{11} - \omega^2 M_1)^{-1} \hat{F}_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, agrupando términos:

$$\hat{d}_2 = \{(K_{22} - \omega^2 M_2) - K_{21}(K_{11} - \omega^2 M_1)^{-1} K_{12}\}^{-1} \{\hat{F}_2 - K_{21}(K_{11} - \omega^2 M_1)^{-1} \hat{F}_1\} \quad (15)$$

Con la ecuación (15) se comprueba que el  $\hat{d}_1$  calculado a partir de datos medidos y teóricos cumple con el equilibrio dinámico planteado en las ecuaciones (8) y (10).

### Mediciones de vibración

Con el propósito de realizar una calibración del modelo desarrollado previamente, se llevaron a cabo pruebas de vibración forzada sobre una viga de acero doblemente articulada (Figura 1). Esta viga, además de su propio peso, carga cinco pesos concentrados también de acero. La vibración forzada de la viga se consiguió mediante un motor eléctrico de 117 V, el cual hace

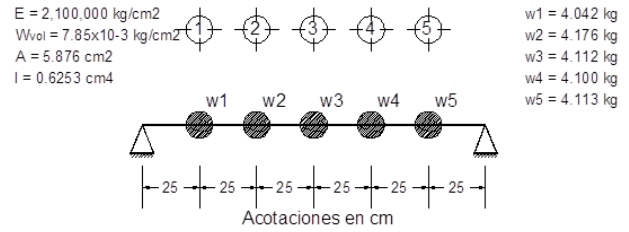


Figura 1. Modelo estructural experimental.

girar un vástago con un peso de 20 gramos concentrado en el extremo del mismo. En la prueba inicial, la frecuencia de excitación se estableció en 12.20 Hz (Ruiz Sibaja, 2005).

Se utilizó un equipo de medición a base de dos acelerómetros piezoeléctricos y un analizador de espectros con dos canales de entrada. Los acelerómetros utilizados tienen una gama muy extensa de frecuencias (de 1 a 1,000 Hz) y muy buena linealidad en todas ellas (Endevco, 1971).

Estos acelerómetros se conectaron a cables blindados para enviar la señal de vibración al analizador de espectros. El analizador que se usó (Figura 2) cubre el intervalo de frecuencias de 0.02 Hz a 25 KHz (Hewlett Packard, 1979).

A la señal registrada en cada uno de los acelerómetros se le hizo un muestreo y se procesó mediante un filtro digital antes de almacenarla en la memoria del aparato. Las señales deben ponderarse en el dominio de la frecuencia mediante filtros que representen las funciones de transferencia entre la excitación dinámica inducida y la respuesta del sistema. Básicamente, el filtro es un dispositivo para la descomposición de las vibraciones con base en sus frecuencias componentes. Éste introduce una atenuación relativamente baja para las oscilaciones contenidas en una o más bandas de frecuencia e introduce una atenuación relativamente alta sobre las oscilaciones contenidas en otras bandas de frecuencia. Para el caso presente se optó por utilizar un filtro para banda



Figura 2. Analizador de espectros HP 3582A.

debido a que deja pasar un determinado intervalo de frecuencias de una señal y atenúa el paso del resto. Así, se seleccionaron frecuencias de corte entre 10 y 1,000 rad/seg, ya que se consideró que en este intervalo se encuentran las frecuencias de interés del modelo estudiado.

Los datos almacenados en la memoria del HP 3582A se analizaron mediante la Transformada Rápida de Fourier. El procedimiento de medición consistió en analizar dos señales simultáneamente. Uno de los acelerómetros se colocó fijo como referencia (canal A), mientras que el otro se situó en puntos estratégicos (canal B) sobre el modelo experimental, con el fin de definir la respuesta dinámica a medir. De esta manera se seleccionaron cuatro posiciones diferentes de los acelerómetros (Figura 3), para realizar series de mediciones sobre la viga de acero. Las respuestas en vibración libre (se identificaron cinco modos) y en vibración forzada se obtuvieron tal como se indica en Ruiz Sibaja (1991) y Ruiz Sibaja (2005). En el Cuadro 1 se presentan los modos de vibración medidos.

Se hizo funcionar el motor a la frecuencia de  $\omega = 76.65$  rad/seg (o bien  $f = 12.20$  Hz), dado que este es un valor que no induce la resonancia en el modelo experimental. Como consecuencia de esta excitación se registraron desplazamientos en el modelo experimental (Cuadro 2).

## RESULTADOS

### Respuesta en vibración libre

Se consideraron cinco grados de libertad para el modelo estructural (Figuras 1 y 3) y se estudiaron diez posibles combinaciones para  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  en cada modo de vibración. En todos los casos se supuso que se conocen tres componentes del

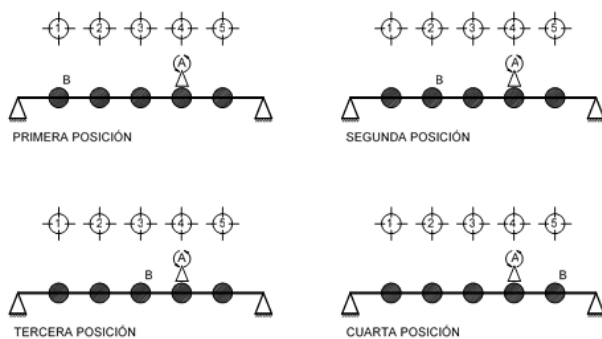


Figura 3. Posiciones de medición de los acelerómetros.

Cuadro 1. Modos de vibración medidos en el modelo experimental

Modo	Frecuencia (rad/seg)	Amplitudes de vibración				
		$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
1	37.70	1.000	1.760	2.007	1.750	1.002
2	151.42	-1.000	-1.100	-0.068	1.090	0.997
3	343.06	-1.000	-0.064	1.040	0.064	-0.900
4	586.85	1.000	-1.010	-0.070	1.090	-0.997
5	840.69	-1.000	1.650	-1.953	1.705	-0.965

Cuadro 2. Desplazamientos medidos para  $\omega = 76.65$  rad/seg

Frecuencia (rad/seg)	Desplazamientos (cm $\times 10^{-2}$ )				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
76.65	1.991	3.144	2.953	1.880	1.447

vector modal (60% del modo de vibración) y a través de éstas se deducen las dos componentes desconocidas. Por supuesto, es más desfavorable suponer que se conocen dos componentes (40% del modo de vibración) y mediante éstas deducir las tres desconocidas. Sin embargo, se encontró que con esta opción se pierde aproximación en el cálculo de la matriz dinámica de rigidez, ecuación (9) (Ruiz Sibaja, 1991). Las diez combinaciones posibles se muestran en el Cuadro 3.

En los Cuadros 4 a 8 se resumen los resultados conseguidos para el estudio de la vibración libre. En cada cuadro aparecen cinco columnas principales. La primera columna (*Combinación*) se refiere a la combinación estudiada de acuerdo con el Cuadro 3. En la segunda columna (*Conocida  $\hat{u}_2$* ) se presentan las componentes de la fracción conocida del vector modal (es decir  $\hat{u}_2$ ). En la tercera columna (*Desconocida  $\hat{u}_1$* ) se muestran las componentes de la fracción desconocida del vector modal (esto es  $\hat{u}_1$ ). En la cuarta columna

Cuadro 3. Combinaciones consideradas para obtener la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre a partir de la fracción conocida  $\hat{u}_2$ .

Respuesta en vibración libre del modelo experimental					
Combinación	Conocida $\hat{u}_2$		Desconocida $\hat{u}_1$		
1	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
2	$v_1$	$v_2$	$v_4$	$v_3$	$v_5$
3	$v_1$	$v_2$	$v_5$	$v_3$	$v_4$
4	$v_1$	$v_3$	$v_4$	$v_2$	$v_5$
5	$v_1$	$v_3$	$v_5$	$v_2$	$v_4$
6	$v_1$	$v_4$	$v_5$	$v_2$	$v_3$
7	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_1$	$v_5$
8	$v_2$	$v_3$	$v_5$	$v_1$	$v_4$
9	$v_2$	$v_4$	$v_5$	$v_1$	$v_3$
10	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_1$	$v_2$

(Pronóstico  $\hat{u}_1$ ) se registran los resultados que se consiguen al aplicar la ecuación (5). Finalmente, en la quinta columna (Medición  $\hat{u}_1$ ) se anotan los resultados que se obtienen directamente de las mediciones en el modelo de laboratorio.

## Respuesta en vibración forzada

Al igual que en el caso de vibración libre, se estudiaron las diez posibles combinaciones para  $\hat{d}_1$  y  $\hat{d}_2$ . Estas combinaciones son semejantes

**Cuadro 4.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre para el primer modo de vibración y su comparación contra la respuesta medida

Combinación	Primer modo de vibración								
	Conocida $\hat{u}_2$			Desconocida $\hat{u}_1$		Pronóstico $\hat{u}_1$		Medición $\hat{u}_1$	
1	1.000	1.760	2.007	$v_4$	$v_5$	1.719	0.988	1.750	1.002
2	1.000	1.760	1.750	$v_3$	$v_5$	2.032	1.007	2.007	1.002
3	1.000	1.760	1.002	$v_3$	$v_4$	2.032	1.748	2.007	1.750
4	1.000	2.007	1.750	$v_2$	$v_5$	1.732	1.014	1.760	2.007
5	1.000	2.007	1.002	$v_2$	$v_4$	1.736	1.737	1.760	2.007
6	1.000	1.750	1.002	$v_2$	$v_3$	1.740	2.016	1.760	2.007
7	1.760	2.007	1.750	$v_1$	$v_5$	1.025	1.016	1.000	1.002
8	1.760	2.007	1.002	$v_1$	$v_4$	1.023	1.731	1.000	1.750
9	1.760	1.750	1.002	$v_1$	$v_3$	1.017	2.028	1.000	2.007
10	2.007	1.750	1.002	$v_1$	$v_2$	0.994	1.727	1.000	1.760

**Cuadro 5.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre para el segundo modo de vibración y su comparación contra la respuesta medida

Combinación	Segundo modo de vibración								
	Conocida $\hat{u}_2$			Desconocida $\hat{u}_1$		Pronóstico $\hat{u}_1$		Medición $\hat{u}_1$	
1	-1.000	-1.760	-2.007	$v_4$	$v_5$	0.916	0.922	1.090	0.997
2	-1.000	-1.000	-1.090	$v_3$	$v_5$	-0.039	1.097	-0.068	0.997
3	-1.000	-1.100	0.997	$v_3$	$v_4$	-1.171	0.887	-0.068	1.090
4	-1.000	-0.068	1.090	$v_2$	$v_5$	-1.074	1.115	-1.100	0.997
5	1.000	-0.068	0.997	$v_2$	$v_4$	-1.036	0.950	-1.100	1.090
6	-1.000	1.090	0.997	$v_2$	$v_3$	-0.903	0.152	-1.100	-0.068
7	-1.100	-0.068	1.090	$v_1$	$v_5$	-1.060	-1.113	-1.000	0.997
8	-1.100	-0.068	0.997	$v_1$	$v_4$	-1.072	-0.995	-1.000	1.090
9	-1.100	1.090	0.997	$v_1$	$v_3$	-1.100	0.024	-1.000	-0.068
10	-0.068	1.090	0.997	$v_1$	$v_2$	-1.199	-1.231	-1.000	-1.100

**Cuadro 6.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre para el tercer modo de vibración y su comparación contra la respuesta medida

Combinación	Tercer modo de vibración								
	Conocida $\hat{u}_2$			Desconocida $\hat{u}_1$		Pronóstico $\hat{u}_1$		Medición $\hat{u}_1$	
1	-1.000	-0.064	1.040	$v_4$	$v_5$	-0.031	-1.101	0.064	-0.900
2	-1.000	-0.064	0.064	$v_3$	$v_5$	0.601	-0.629	1.040	-0.900
3	-1.000	-0.064	-0.900	$v_3$	$v_4$	0.929	0.059	1.040	0.064
4	-1.000	1.040	0.064	$v_2$	$v_5$	0.038	-0.847	-0.064	-0.900
5	-1.000	-1.040	-0.900	$v_2$	$v_4$	-0.037	0.188	-0.064	-0.960
6	-1.000	0.064	-0.900	$v_2$	$v_3$	0.001	1.017	-0.064	1.040
7	-0.064	1.040	0.064	$v_1$	$v_5$	-1.125	-0.867	-1.000	-0.900
8	-0.064	1.040	-0.900	$v_1$	$v_4$	-1.088	0.191	-1.000	0.064
9	-0.064	0.064	-0.900	$v_1$	$v_3$	-1.033	0.952	-1.000	1.040
10	1.040	0.064	-0.900	$v_1$	$v_2$	-1.057	-0.036	-1.000	-0.064

**Cuadro 7.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre para el cuarto modo de vibración y su comparación contra la respuesta medida

Cuarto modo de vibración									
Combinación	Conocida $\hat{u}_2$			Desconocida $\hat{u}_1$		Pronóstico $\hat{u}_1$		Medición $\hat{u}_1$	
1	1.000	-1.010	-0.070	$v_4$	$v_5$	0.677	-0.730	1.090	-0.997
2	1.000	-1.010	1.090	$v_3$	$v_5$	3.526	3.232	1.090	-0.997
3	1.000	-1.010	-0.997	$v_3$	$v_4$	0.078	0.990	-0.070	1.090
4	1.000	-0.070	1.090	$v_2$	$v_5$	-0.727	-1.310	-1.010	-0.997
5	1.000	-0.070	-0.997	$v_2$	$v_4$	1.840	0.310	-1.010	1.090
6	1.000	1.090	-0.997	$v_2$	$v_3$	-1.093	0.015	-1.010	-0.070
7	-1.010	-0.070	1.090	$v_1$	$v_5$	1.106	-1.263	1.000	-0.997
8	-1.010	-0.070	-0.997	$v_1$	$v_4$	1.056	1.476	1.000	1.090
9	-1.010	1.090	-0.997	$v_1$	$v_3$	0.899	-0.437	1.000	-0.070
10	0.070	1.090	-0.997	$v_1$	$v_2$	1.046	-0.956	1.000	-1.010

**Cuadro 8.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{u}_1$  de la respuesta en vibración libre para el quinto modo de vibración y su comparación contra la respuesta medida

Quinto modo de vibración									
Combinación	Conocida $\hat{u}_2$			Desconocida $\hat{u}_1$		Pronóstico $\hat{u}_1$		Medición $\hat{u}_1$	
1	-1.000	1.650	-1.953	$v_4$	$v_5$	1.678	-1.106	1.705	-0.965
2	-1.000	1.650	1.705	$v_3$	$v_5$	-2.110	-1.067	-1.953	-0.965
3	-1.000	1.650	-0.965	$v_3$	$v_4$	-2.211	1.945	-1.953	1.705
4	-1.000	-1.953	1.705	$v_2$	$v_5$	1.789	-1.047	1.650	-0.965
5	-1.000	1.953	-0.965	$v_2$	$v_4$	1.814	-1.849	1.650	1.750
6	-1.000	1.705	-0.965	$v_2$	$v_3$	1.916	-2.226	1.650	-1.953
7	1.650	-1.953	1.705	$v_1$	$v_5$	-1.048	-1.042	-1.000	-0.965
8	1.650	-1.953	-0.965	$v_1$	$v_4$	-1.053	1.817	-1.000	1.705
9	1.650	1.705	-0.965	$v_1$	$v_3$	-1.073	2.105	-1.000	1.953
10	1.953	1.705	0.965	$v_1$	$v_2$	-1.119	1.837	-1.000	1.650

a las que aparecen en el Cuadro 3, sin más que intercambiar  $\hat{u}_1$  por  $\hat{d}_1$  y  $v_1$  por  $d_1$ . Nuevamente se optó por deducir dos componentes de desplazamiento (40% de la respuesta en vibración forzada) a partir de tres componentes conocidas (60% de la respuesta en vibración forzada), ya que en caso contrario este modelo presenta desviaciones apreciables entre la respuesta pronosticada y la respuesta medida (Ruiz Sibaja, 1991). El cálculo de  $\hat{d}_1$  se realizó de acuerdo con la ecuación (13). Los resultados de esta calibración se muestran en el Cuadro 9 y la explicación para cada columna es la misma que para el caso de vibración libre, excepto que  $\hat{d}_1$  y  $\hat{d}_2$  están dados en centímetros. La frecuencia de excitación se estableció en  $\omega = 76.65$  rad/seg (o bien  $f = 12.20$  Hz) debido a que es un valor que no induce la resonancia en el modelo experimental.

## DISCUSIÓN

### Respuesta en vibración libre

En términos generales se obtiene buena concordancia de resultados para los cinco modos de vibración medidos en el modelo experimental. El cuarto modo de vibración (Cuadro 7) presenta diferencias notorias entre las amplitudes pronosticadas y las amplitudes medidas, para las combinaciones 1, 2, 5 y 9. Probablemente, esto se deba a errores de redondeo al efectuar operaciones de inversión y multiplicación de matrices (ver ecuación 5). Para el cuarto modo de vibración los elementos en la diagonal principal de  $(K_{11} - \rho_4^2 M_1)$  son pequeños en relación con los elementos que se encuentran fuera de ésta. Al no ser dominante la diagonal principal se disminuye la eficiencia numérica del algoritmo de inversión, lo cual probablemente conduce a la dispersión encontrada.

**Cuadro 9.** Obtención de la fracción desconocida  $\hat{d}_1$  de la respuesta en vibración forzada para  $\omega = 76.65$  rad/seg y su comparación contra la respuesta medida

Combinación	Respuesta en vibración forzada ( $\text{cm} \times 10^{-2}$ )									
	Conocida $\hat{d}_2$			Desconocida $\hat{d}_1$		Pronóstico $\hat{d}_1$		Medición $\hat{d}_1$		
1	1.991	3.144	2.953	$d_4$	$d_5$	3.053	2.361	1.880	1.447	
2	1.991	3.144	1.880	$d_3$	$d_5$	3.023	1.059	2.953	1.447	
3	1.991	3.144	1.447	$d_3$	$d_4$	3.789	3.045	2.953	1.880	
4	1.991	2.953	1.880	$d_2$	$d_5$	3.040	1.074	3.144	1.447	
5	1.991	2.953	1.447	$d_2$	$d_4$	2.872	2.520	3.144	1.880	
6	1.991	1.880	1.447	$d_2$	$d_3$	2.902	2.714	3.144	2.953	
7	3.144	2.953	1.880	$d_1$	$d_5$	2.089	1.087	1.991	1.447	
8	3.144	2.953	1.447	$d_1$	$d_4$	2.140	2.440	1.991	1.880	
9	3.144	1.860	1.447	$d_1$	$d_3$	2.104	2.874	1.991	2.953	
10	2.953	1.860	1.447	$d_1$	$d_2$	2.044	3.114	1.991	3.144	

### Respuesta en vibración forzada

El pronóstico de la respuesta en vibración forzada concuerda razonablemente bien con la respuesta medida. La única discordancia se presenta en la primera combinación (Cuadro 9), en la cual la respuesta pronosticada es 60% menor que la respuesta medida. Esto puede deberse a que la mayoría de los coeficientes de la submatriz  $(K_{11} - \omega^2 M_1)$  que aparece en la ecuación 13, son en promedio 10% menores que los de la misma matriz calculada con la respuesta medida al 100%. Debe considerarse también que el modelo propuesto en este trabajo no incluye el efecto del momento provocado por la carga excéntrica, ni considera el amortiguamiento, lo cual probablemente influye en la dispersión encontrada para la primera combinación.

### CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo de cálculo para procesar mediciones de vibración de sistemas estructurales. El modelo propone deducir la fracción no medida de la respuesta dinámica de una estructura, a partir de la fracción medida de aquélla. El desarrollo considera la respuesta en vibración libre y la respuesta en vibración forzada.

En esta etapa de la investigación es necesario suponer conocida la matriz de masas del sistema debido a que no fue posible deducirla mediante mediciones de vibración. Aunque el estudio de un modelo experimental de cinco grados de libertad no justifica una generali-

zación, los resultados obtenidos con la metodología propuesta demuestran que es posible determinar, con una precisión adecuada, la fracción no medida de la respuesta dinámica de un sistema estructural.

Es necesario considerar que, en el caso general, sólo es posible medir en campo una fracción de la respuesta dinámica de una estructura. Por lo tanto, en el modelo propuesto, a partir de la fracción medida de la respuesta dinámica, se obtiene la fracción no medida de ésta.

En todos los casos se optó por suponer que la fracción medida de la respuesta dinámica ( $\hat{u}_2$  para respuesta en vibración libre y  $\hat{d}_2$  para respuesta en vibración forzada) representa 60% de la respuesta dinámica total, puesto que así se mejora la aproximación en el cálculo de la fracción no medida de ésta, tanto para vibración libre como para vibración forzada.

Para el caso de vibración libre el modelo presentó dispersiones de hasta 300% en el cuarto modo de vibración, respecto del resultado medido in situ. Probablemente esto se deba a que la submatriz  $(K_{11} - \rho_4^2 M_1)$  que interviene en el cálculo de la respuesta no medida, es cercanamente singular, lo cual origina esta gran dispersión. Se concluye que el modelo no tiene buen comportamiento en el caso de matrices que tengan elementos muy pequeños en su diagonal principal. Con esta salvedad, en los cuatro modos restantes la metodología desarrollada mostró una buena aproximación a la realidad física del problema.

Por lo que se refiere al estudio de la respuesta en vibración forzada, los resultados encontrados alcanzaron una buena aproximación a la respuesta registrada en los ensayos del modelo experimental. En promedio, la mayor diferencia entre la respuesta pronosticada y la respuesta medida resultó de 20%, lo cual se considera aceptable dado que el modelo propuesto pretende optimizar el trabajo de campo, haciendo el número de mediciones necesarias para caracterizar la respuesta dinámica. Se presentó una divergencia de 60% entre la respuesta pronosticada y la respuesta medida, para la primera combinación que aparece en el Cuadro 9. Esta diferencia se atribuye a los coeficientes de influencia de la submatriz  $(\mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M}_1)$  que, en promedio, son 10% menores que los de la esta misma matriz calculada con la respuesta dinámica medida al 100%. Habrá que mejorar el modelo considerando el efecto del momento flexionante originado por la carga excéntrica, además de

incluir el amortiguamiento en el planteamiento de las ecuaciones desarrolladas.

En cualquier caso, puesto que el modelo aquí propuesto intenta caracterizar sistemas estructurales con el número necesario de mediciones de vibración, se considera que la metodología presentada constituye una mayor aproximación a la realidad que un modelo teórico y puede acudir a la herramienta aquí presentada, siempre que no se disponga de la respuesta dinámica completa de la estructura.

## REFERENCIAS

- Clough, R.W. & Penzien, J. (1975). Dynamics of structures. McGraw-Hill.
- Ruiz Sibaja, A. (1991). "Análisis y síntesis dinámicos de estructuras costa afuera sujetas a carga de maquinaria recíproca". Tesis de Maestría, SEPI-ESIA-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional. México, D.F., México.
- Ruiz Sibaja, A. (2005). "Identificación de vigas mediante pruebas de vibración forzada", Revista Ciencia y Tecnología en la Frontera, año II, n° 3, ISSN 1665-9775.
- Endevco Division of Becton, Dickinson and Company. (1971). Vibration computer. Endevco.
- Hewlett Packard. (1979). Operating manual model 3582A spectrum analyzer. Hewlett Packard.